

O primórdio da Geometria Não-Euclidiana

Andréia Luisa Friske, *Autora, UFSM*

TODA geometria baseada nos Postulados de Euclides é chamada de Geometria Euclidiana. Os Postulados são os seguintes:

- Dois pontos distintos determinam uma única reta;
- A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário;
- É possível obter uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio;
- Todos os ângulos retos são iguais;
- Dados um ponto P e uma reta r , existe uma única reta que passa pelo ponto P e é paralela a r .

Este texto é baseado em [1], no qual o autor diz que apesar dos Postulados e da geometria Euclidiana serem precisos em superfícies planas, o mesmo não pode ser dito para superfícies curvas. Por exemplo, sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Entretanto, quando traçamos o mesmo ângulo sobre uma superfície curva, a soma desses ângulos não é igual a 180° . Dessa forma, tornou-se necessário criar uma nova geometria para explicar e resolver esse tipo de problema.

Os nomes que mais se destacam na construção dessa nova geometria são Nikolai Lobachevski, János Bolyai, Carl Gauss e Bernhard Riemann. O que instigou esses pesquisadores à busca de uma nova geometria foi o quinto postulado de Euclides, que permanece até hoje sem prova de veracidade. Se o quinto postulado fosse desconsiderado e aceito que dados um ponto P e uma reta r , existem infinitas retas que passam por P e são paralelas a r , o que aconteceria? Inicialmente, esperava-se construir uma nova geometria baseada nesse novo axioma. E se o quinto postulado fosse realmente verdadeiro, em um dado momento a nova geometria entraria em contradição, provando a veracidade do quinto postulado. Porém, o que ocorreu não foi bem o esperado pelos pesquisadores, pois após desenvolver a nova geometria não encontraram contradições. Aliás, o que mais impressionou os pesquisadores foram as características únicas e intrigantes da nova e elegante geometria construída.

Os matemáticos Lobachevski e Gauss logo imaginaram como essa nova geometria poderia se relacionar com o mundo físico. Quais das geometrias, a Euclidiana ou a nova geometria, denominada Não-Euclidiana, descreveria o espaço com maior exatidão. Gauss tentou medir a soma dos ângulos de um triângulo formado por três montanhas. Já Lobachevski tentou realizar a mesma medida, porém, utilizando um triângulo maior. Esse triângulo seria formado por duas posições da Terra em sua órbita e uma estrela distante. Como nessa época não haviam equipamentos com tecnologia suficiente para fornecer a precisão necessária para realizar essas medições, ambos não tiveram sucesso em suas pesquisas.

A geometria Não-Euclidiana é definida sobre: a superfície esférica, descoberta a partir de trabalhos dos pesquisadores Gauss, Lobachevski e Bolyai; ou a superfície hiperbólica, descoberta pelo matemático Riemann. O Espaço Hiperbólico

e o Espaço Esférico são uniformes, da mesma forma que o Espaço Euclidiano. Dessa maneira, os espaços são considerados homogêneos e isotrópicos, ou seja, suas propriedades são as mesmas em qualquer local definido sobre ele e suas propriedades não dependem da direção em que são consideradas.

Uma forma de identificar a diferença entre a geometria Euclidiana, Hiperbólica e Esférica é analisar suas superfícies utilizando uma folha de papel. Colocando uma folha de papel sobre uma superfície plana, observa-se que o papel cobre a superfície uniformemente. Cobrindo uma superfície esférica com a mesma folha de papel, percebe-se que surgem vincos na folha. Assim, em qualquer ponto dado sobre a esfera a área do papel é maior que a área a ser coberta. Novamente, com um papel do mesmo tamanho, cobrindo-se uma superfície hiperbólica, vê-se que a área do papel é insuficiente para cobrir toda a superfície, podendo inclusive rasgar o papel.

TABLE I
COMPARAÇÃO DE TRÊS ESPAÇOS UNIFORMES

Espaço Euclidiano	Dado um ponto podemos traçar somente uma paralela a uma linha reta
	A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°
	A circunferência de um círculo é igual π vezes o seu diâmetro
Espaço Esférico	Através de um ponto dado não podemos traçar nenhuma paralela a uma linha reta
	A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180°
	A circunferência de um círculo é menor que π vezes o seu diâmetro
Espaço Hiperbólico	Dado um ponto podemos traçar mais de uma paralela a uma linha reta
	A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180°
	A circunferência de um círculo é maior que π vezes o seu diâmetro

Percebe-se que tanto a geometria Euclidiana quanto a Não-Euclidiana são fundamentais para a compreensão da matemática e do mundo que nos rodeia. A descoberta dessas geometrias permitiu e permite solucionar inúmeros problemas, o que mostra a importância não só de uma, mas de ambas.

Referências:

- [1] OBSERVATÓRIO NACIONAL. **A Geometria dos Espaços Curvos ou Geometria Não-Euclidiana**. Disponível em: http://wwwp.fc.unesp.br/hsilvestrini/a_geometria_dos_espacos_curvos.pdf. Acessado em 11 out. 2015.

Programação Linear: aplicando Método Geométrico

Bernardo Abreu da Cruz, *Autor, UFSM*

A Álgebra Linear é um ramo da matemática que originou-se a partir do estudo de sistemas lineares. Como é visto em [1], é possível encontrá-la em diversas aplicações na área da matemática, uma delas é conhecida como Programação Linear Geométrica (PL), na qual trabalha-se com a otimização de problemas aplicados na indústria ou no comércio, tais como, determinar o lucro máximo de uma venda, minimizar gastos de uma certa produção, melhorar rendimentos, etc. O Método Geométrico é uma das possíveis maneiras de encontrar o melhor resultado ou valor ótimo, como é chamado, para essas situações.

A partir de uma situação formula-se o problema com uma visão matemática, montando a função problema, a qual queremos aplicar a melhoria e que é chamada de função objetivo. Em seguida, tomamos as restrições, representadas por desigualdades, que ela deve satisfazer. Algumas condições conhecidas são: a quantia máxima de um orçamento a ser gasta por dia, o valor mínimo de uma venda para haver lucro, entre outras.

Ao expressarmos as restrições no plano cartesiano, teremos regiões que satisfazem cada uma das condições. Se cruzarmos todas as restrições, obteremos uma determinada região comum entre todas as desigualdades, podendo ser ela limitada, uma região fechada que contém um ponto ou reta com os valores ótimos ou ilimitada, uma região aberta, que pode não ter um valor máximo.

Para melhor explicar o assunto, será desenvolvido o seguinte problema: Uma certa padaria produz dois tipos de pães: trigo e milho, que diferem apenas nos ingredientes A e B. Considere que cada quilo de pão de trigo contém 2 medidas do ingrediente A e 1 medida do ingrediente B, enquanto cada quilo do pão de milho contém 1 medida do ingrediente A e 2 medidas do ingrediente B. Suponha também que o lucro a cada quilo de pão de trigo seja de 80 centavos, e de 1 real para o pão de milho. Se a padaria tem 50 medidas do ingrediente A e 70 medidas do ingrediente B disponíveis por dia, quantos quilos de pão de trigo e quantos quilos de pão de milho devem ser produzidos por dia para que o lucro seja máximo?

Primeiro, iremos montar a função a qual está relacionada diretamente com a pergunta. Para padaria obter o lucro máximo é preciso saber a função que determina o quanto ela ganha com a venda dos pães, esta será nossa função objetivo. Sendo x a quantidade vendida de pão de trigo e y a quantidade de pão de milho, temos: $Lucro = 0.8x + 1y$.

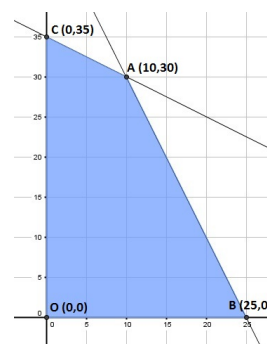
Em segundo lugar, vamos estabelecer as restrições. É determinado no enunciado que a padaria tem uma certa quantidade de ingredientes disponíveis por dia, assim teremos duas restrições, uma para cada tipo de ingrediente.

$$2x + y \leq 50$$

$$x + 2y \leq 70$$

$$x > 0 \text{ e } y > 0$$

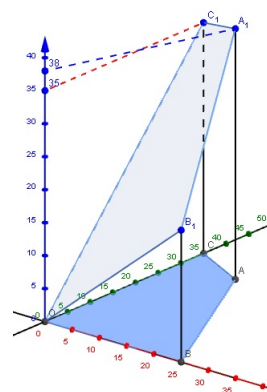
Ao cruzarmos as quatro restrições obteremos a seguinte região viável:



Nela encontraremos, normalmente em algum dos vértices, o valor ótimo para nossa função objetivo. Como visto em [1], página 373, o Teorema 11.3.1, os valores máximos e mínimos estarão nos extremos da região viável. Logo, ao testarmos as coordenadas dos vértices da região viável na função objetivo encontraremos o valor ótimo.

Ponto	x	y	Lucro
A	10	30	38
B	25	0	20
C	0	35	35

Com isso, obtemos o lucro máximo de 38,00 reais, encontrado no ponto (10,30). Sendo x e y as quantidades, em quilos, de cada tipo de pão a ser vendido.



O ponto máximo fica mais visível no espaço R^3 , onde podemos ver a inclinação da região viável.

Referências:

[1] Howard, A.; Rorres, C. **Álgebra Linear com aplicações**. Tradução de Claus Ivo Doering. 8 ed. Porto Alegre, Bookman, 2001, p 317.

PET MATEMÁTICA – UM PEQUENO PANORAMA SOBRE OS EGRESSOS

Carmen Vieira Mathias, *Autor, UFSM*

COM a mudança de filosofia dos grupos PET, oficializado pela Lei 11.180/2005 (Brasil, 2005), foram inseridas ao grupo, atividades de ensino, pesquisa e extensão voltadas e abertas para os acadêmicos do curso não vinculados ao PET e também à indivíduos de fora da comunidade acadêmica.

Nesses 23 anos de existência, envolveram-se com o grupo PET, 109 alunos, sendo que desses, 10 ainda estão no curso de graduação. O gráfico (Figura 1) apresenta a distribuição de alunos egressos, por ano de ingresso no grupo PET, durante o tempo de existência do grupo.

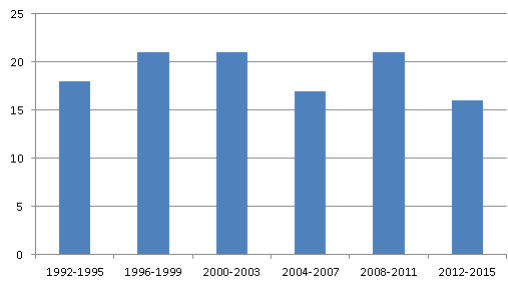


Fig. 1. Distribuição dos egressos do grupo PET Matemática

Todas as atividades possuem uma importância e significado para os egressos. Porém os projetos de iniciação científica desenvolvidas no âmbito do PET são fundamentais no contexto de uma formação global, pois proporcionam vivências e contato com metodologias de pesquisa, preparação e apresentação de textos científicos. Especificamente no PET Matemática tais atividades contam com a importante colaboração de professores do Departamento na orientação de projetos de Iniciação Científica. Obviamente, esse não é o foco das atividades desenvolvidas, mas observa-se a importância dessa formação, ao realizar um levantamento qualitativo a partir da lista de egressos (PET, 2015) já diplomados.

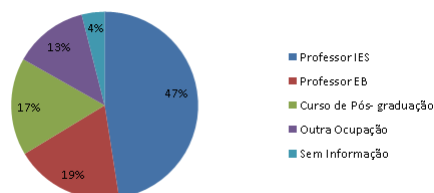


Fig. 2. Situação dos Egressos do Pet Matemática

Pode-se observar na figura 2, uma grande parte (47%) dos ex petianos, são egressos que cursaram mestrado e ou doutorado

e atualmente são professores de universidades ou Institutos Federais de Educação.

Também se observa que as atividades de ensino realizadas, são muito importantes, visto que 66% dos egressos volta-se para a docência (no ensino básico ou superior), claro que esse percentual é significativo, visto a especificidade do curso ao qual o grupo está vinculado. A grande gama de atividades realizadas aponta para as oportunidades que o PET propicia, pois dos 13% dos egressos que possuem outra ocupação, constatou-se que alguns trabalham como funcionários de órgãos públicos, em instituições financeiras e como consultores de empresas. A figura 3 apresenta um panorama da distribuição, quanto a região geográfica do país, dos ex-petianos professores de Instituições de Ensino Superior.

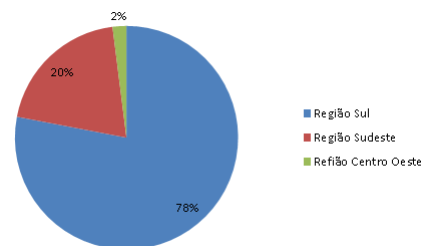


Fig. 3. Situação dos Egressos do Pet Matemática

É interessante pontuar que do quantitativo de egressos, atualmente onze ex petianos são professores na UFSM, sendo que sete deles atuam no Departamento de Matemática, dois na CESNORS e dois no Campus de Cachoeira do Sul.

Para concluir, observa-se que a experiência vivenciada ao longo dos anos, mostra que, o envolvimento dos acadêmicos possibilita a diversificação do contato com a realidade tanto acadêmica quanto social, proporcionado pelas atividades de pesquisa, ensino e extensão planejadas e executadas pelo grupo. É bastante gratificante ver que os integrantes do PET Matemática de outrora estão espalhados pelo Brasil atuando na academia e em muitos outros setores.

Referências:

- [1] BRASIL. Lei nº 11.180, de 23 de setembro de 2005. Institui o Programa de Educação Tutorial – PET. Diário Oficial da República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 2005.
- [2] PET. Site do Grupo Pet Matemática. 2015.

Wolfram Alpha como ferramenta de apoio para Cálculo Diferencial

Felipe F. Lorenci, *Autor, UFSM*

WOLFRAM Alpha é um ambicioso sistema *web* que visa uma nova forma de gestão de perguntas e respostas, principalmente no âmbito matemático. Ele tem por objetivo coletar e tratar todo tipo de informação, implementando cada modelo, método ou algoritmo conhecido, permitindo dessa forma, que qualquer informação possa ser administrada digitalmente.

Dotado de um sistema de computação dinâmico, esta ferramenta é capaz de interpretar requerimentos em língua materna, ou seja, as solicitações podem ser escritas de forma literal, sem o uso de uma linguagem ou sintaxe específica, o que facilita muito o processo de obtenção de respostas sobre determinado problema, visto que ele consegue interpretar praticamente qualquer entrada, tornando-se um sistema de busca de informações universal (Wolfram Alpha, 2015).



Fig. 1. Símbolo do Wolfram Alpha [1]

Os principais ramos que esta ferramenta cobre, são: matemática, unidades e medidas, estatística e análise de dados, química, finanças, física, astronomia, engenharia, saúde, engenharia, educação, ciências da terra, meteorologia, tecnologia e ciência da computação. Com seu sistema de buscas dinâmico, basta uma entrada relativa à um destes temas, para que seu algoritmo a interprete e busque as palavras-chave em grandes bancos de dados. Após a busca e extração destes dados, seu programa monta as informações da forma mais completa e clara possível, retornando-as concisamente ao usuário.

Este sistema abre possibilidades interessantes na área do Cálculo Diferencial, uma vez que não requer uma forma fixa na entrada de dados e exibe um relatório completo acerca deles. Um exemplo prático, seria o cálculo da integral da função $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$, definida nos limites de integração 2 e 10. Ela pode ser requirida de várias formas, algumas delas:

- integral $[2, 10]$ $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$;
- int $[2, 10]$ $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$;
- integral of $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$ from 2 to 10;

A partir de qualquer uma das entradas acima, o programa reconhece que o usuário deseja informações sobre esta integral, devolvendo a mesma resposta para qualquer uma

delas. Neste caso, a resposta é composta pelas seguintes informações:

A integral definida da função, com seu resultado:

$$\int_2^{10} (2x^2 - 5x + 6)dx = \frac{1408}{3} \approx 469.33$$

A representação visual da integral:

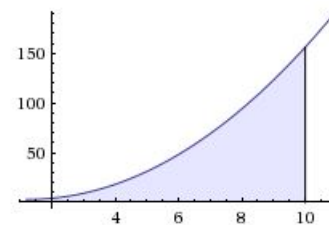


Fig. 2. Representação gráfica da integração

E por fim, além de determinar o valor da integral definida, o aplicativo fornece a integral indefinida da função:

$$\int (2x^2 - 5x + 6)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + Const$$

Como pode-se perceber, a partir de uma simples e intuitiva entrada, obtêm-se várias respostas acerca do objeto procurado.

Além de integração, outras operações suportadas pelo *Wolfram Alpha* no que tange a cálculo e análise, são: limites e derivações de funções de uma ou mais variáveis, sequências e séries, equações diferenciais, análise complexa, análise vetorial, dentre outros.

Com todos estas possibilidades, lembrando que este recurso é gratuito e que não é necessário instalá-lo no computador, visto que o ambiente é totalmente voltado à *web*, conclui-se que é extremamente proveitoso usar esta ferramenta como suporte para a disciplina de Cálculo Diferencial: tanto em casa quanto em sala de aula. Resolvendo uma lista de exercícios, o aluno pode conferir suas respostas de forma rápida e precisa, sem contar com o recurso de resolução passo-a-passo, onde o programa revela a resolução do problema de forma didática e detalhada, sem chances de erros, o que acredita-se ser um grande avanço na área educacional.

Referências

[1] **Wolfram Alpha - Computational Knowledge Engine.** Disponível em: <<http://www.wolframalpha.com/>>. Acesso em: out. 2015.

Teoria da Relatividade: uma discussão, uma solução

Flavia Barbieri Moro, UFSM ,

ALBERT EINSTEIN nasceu em Ulm, na Alemanha, em 1879. Em 1880, sua família mudou-se para Monique, onde seu pai e seu tio montaram um pequeno negócio de eletricidade. Na escola, Einstein não foi considerado um menino prodígio, pois suas notas não eram tão boas.

Após concluir o curso de física licenciatura na escola politécnica de Zurique, Einstein a partir de 1902, começou a viver e trabalhar na cidade de Berna. E foi ali, que numa manhã do mês de maio, foi visitar seu amigo e colega do escritório de Patentes Michelli Besso para discutir sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento, relacionada aos problemas das cargas em movimento e da interação entre campos elétrico e magnético.



Figura 1 - Albert Einstein (1879-1955) quando funcionário do Escritório de Patentes de Berna, cerca de 1906.

Besso, apesar de ser engenheiro, interessava-se muito com os problemas físicos, por isso, participava de um grupo de discussões onde Einstein fazia parte. Apesar de leigo no assunto, Besso era paciente e atento as explicações de Einstein, embora muitas vezes alguns detalhes estavam longe de ser compreendidos por um leigo, porém sempre perguntando como de costume. Com isso, gerava grandes debates. Um deles é o comportamento de corpos inerciais que se movem um com relação ao outro e quais mudanças iriam ocorrer nas grandezas elétricas e magnéticas nesses sistemas inerciais. Einstein não acreditava que o movimento retilíneo e uniforme entre dois observadores podia ser detectado por medidas de manifestações eletromagnéticas ou ópticas.

Havia uma teoria desenvolvida pelo grande físico holandês Hendrick Antoon Lorentz na década de 80 do século XIX, a qual Einstein não se convencia a respeito da equivalência dos referenciais inerciais para processos eletromagnéticos. Foi neste dia, no mês de maio de 1905, que essa teoria de Lorentz teve grande importância na conversa dos amigos (Besso e

Einstein).

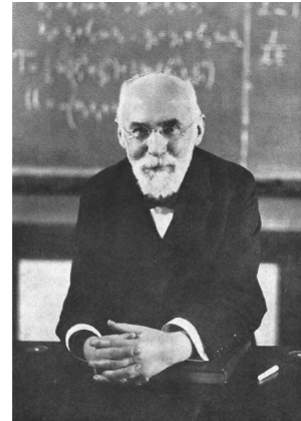


Figura 7 - O físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) criou uma teoria tecnicamente complexa, que explicava praticamente todos os fenômenos ópticos e eletromagnéticos. Sua interpretação em termos de um "processo copernicano" foi a chave para a teoria da relatividade de 1905 (Foto: Museu Boerhaave, Leiden).

Besso chamou a atenção de Einstein para a teoria de Lorentz, pois ela continha conceitos importantes como do éter, havia também uma variável auxiliar do tempo, havia também uma hipótese do encurtamento no comprimento de corpos na direção de seu movimento em relação ao éter.

Depois de muita conversa, Einstein foi embora e retornou no outro dia com um sorriso no rosto dizendo: "Graças a você solucionei o problema". Passadas cinco semanas, aproximadamente dia 30/06/1905, Einstein submeteu aos *Annalen der Physik* o artigo que, com o título: "Acerca da eletrodinâmica dos corpos em movimento", fundaria a teoria especial da relatividade. O trabalho publicado não possui nenhuma referência, apenas um agradecimento a seu amigo Michelli Besso. Infelizmente, os relatos históricos de como essa teoria foi criada não existem.

Mas o que de decisivo e tão importante aconteceu na conversa entre Besso e Einstein?

Aquela conversa resultou apenas num ponto final, pois, Einstein desde a juventude estava rodeado de problemas de eletrodinâmica (sua família trabalhava na fabricação de equipamentos elétricos). Albert iniciou aos dezesseis anos, escrevendo um texto sobre o éter e assim seguiu sua brilhante carreira se envolvendo com outros problemas.

Portanto, podemos dizer que os problemas que Einstein se envolvia eram especiais e possuíam estruturas internas de física clássica (por exemplo, a propagação de ondas em referenciais em movimento se encontram).

Referência:

- [1] Renn J. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 1, p. 27 - 36, 2004.

Memorial Mariano da Rocha

Guilherme Godoy, *Autor, UFSM,*

MUITOS alunos da UFSM desconhecem o verdadeiro significado do obelisco situado entre a Reitoria e o terminal de ônibus do campus sede. Ao contrário de muitas versões conhecidas por parte dos acadêmicos, o monumento foi construído em homenagem ao fundador da instituição, José Mariano da Rocha Filho.

Oitavo filho de Maria Clara Marques e do Médico José Mariano da Rocha, José Mariano da Rocha Filho nasceu no dia 12 de fevereiro de 1915. Idealizada e fundada por ele, regida pela Lei n. 3.834- C, de 14 de dezembro de 1960, a Instituição foi criada, em um primeiro momento denominada Universidade de Santa Maria.



Elaborado por alunos do Curso de Arquitetura, orientados por professores dos Cursos de Engenharia e Arquitetura e Urbanismo da Instituição, o projeto arquitetônico foi finalizado em 1999. Quando então começou-se uma campanha de captação de recursos para viabilização da obra, visto que o ano seguinte seria marcado pela comemoração dos 40 anos da Universidade Federal de Santa Maria.

O projeto original (figura ao lado) foi dividido em três partes. A primeira parte visava a construção de uma praça em formato de círculo, disposta em mais de três mil metros quadrados, situada aonde atualmente há o obelisco. Também haveria bancos para o laser dos universitários. No centro da mesma iria ser construído um espelho d'água.

A segunda parte da obra é o que conhecemos hoje. Uma pirâmide de 14 metros de altura. A princípio existiria um farol em sua ponta, o qual representaria a luz do conhecimento que aponta do interior do Estado em todas as direções. O obelisco sairia de dentro do espelho d'água, o qual ainda não existe. Os restos mortais do reitor ficariam dentro do obelisco, no entanto eles ainda não estão lá.

Ao contrário do que dizem, conforme Pedro Saurin (engenheiro do projeto), o obelisco não faz nenhuma apologia a maçonaria. Sua forma foi idealizada por Antonio Carlos

de Lemos, membro da Associação dos Amigos do Memorial Reitor Mariano, como algo que elevasse a memória de Mariano e refletisse o sol com esplendor, representando a luz do conhecimento.

A terceira e última parte do projeto era a construção de um museu de mais de 800 metros quadrados. O espaço utilizado contaria com exposições temporárias e da vida de Mariano Rocha. Mas infelizmente este espaço ainda não existe.



Na época da campanha de arrecadação de fundos para a efetivação do projeto, foram arrecadados R\$ 981,00 em doações. Porém o orçamento total da obra era de R\$ 177 mil. Para começar a construção seria necessário R\$ 40 mil, mas visto da insuficiência de verba, a Associação dos Amigos do Memorial Reitor Mariano buscou junto a Lei municipal de Incentivo à Cultura (LIC) recursos para a execução da mesma. Quando em 2003, um projeto foi aprovado, sendo assim liberado para a realização da obra cerca de R\$ 40 mil.

Mesmo sem todo o dinheiro a construção do memorial começou, em um primeiro momento para aumentar a arrecadação de doações. As obras começaram pela segunda parte, isto é, pela construção do que conhecemos hoje do memorial – o obelisco. Visto da falta de verba, a construção do obelisco foi concluída em 2011, financiada basicamente via LIC e pela própria família de Mariano da Rocha.

Referências:

[1] **Mariano da Rocha, o reitor-fundador.** Disponível em: <http://coral.ufsm.br/revista/numero01/cronologia.html>. Acessado em 17 out. de 2015.

[2] DIÁRIO DE SANTA MARIA. **Para não ficar só na memória.** Disponível em: <http://www.clicrbs.com.br/jornais/dsm/imgcapa/CD20100825.pdf>. Acessado em 17 de out. de 2015.

[3] MEMORIAL REITOR MARIANO. Disponível em: <http://coral.ufsm.br/memorialreitormariano/memorial.html>. Acessado em 17 de out. de 2015.

[4] **A história da Universidade Federal de Santa Maria retratada em imagens.** Disponível em: <http://site.ufsm.br/noticias/exibir/3282>. Acessado em 17 out. de 2015.

Unabhängigkeit, do alemão “Independência”

Patrícia Sülz, Autor, UFSM

MUITOS casos de probabilidade são tidos como casos independentes, ou seja, quando certos eventos não influenciam em outros. Por exemplo, se no lançamento de uma moeda obtemos a face “cara”, nada impede de num lançamento posterior obtermos a face “cara” ou “coroa”. Vejamos agora duas definições de probabilidade com independência entre dois eventos.

INDEPENDÊNCIA: Sejam A e B dois eventos. Eles são independentes se a probabilidade de B não é afetada se A ocorrer, assim como também a probabilidade de um deles acontecer não é afetada se B ocorrer.

DEFINIÇÃO: Dois eventos, A e B , são independentes se $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$.

Vejamos um exemplo do caso de independência:

Um lote contém 10 peças, sendo 7 boas (B) e 3 defeituosas (D). Retiramos duas peças, ao acaso e com reposição, para inspeção. Qual a probabilidade de se obter duas peças defeituosas?

Resolução:

Como as duas peças são retiradas ao acaso e com reposição, ou seja, após retirarmos a primeira peça esta é colocada novamente no lote para que possamos efetuar a segunda retirada. Então, temos as seguintes probabilidades:

$$P(D_1) = P(D_2) = \frac{3}{10}$$

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{7}{10}$$

E o seguinte espaço amostral:

$$\Omega = (D_1, B_2); (B_1, D_2); (D_1, D_2); (B_1, B_2)$$

Queremos a probabilidade de retirarmos do lote duas peças com defeito. Contando que a primeira e a segunda retirada foram de peças defeituosas, acontecendo as duas de forma independente, temos a seguinte probabilidade:

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) * P(D_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

Qual seria a diferença se não tivéssemos a reposição das peças? Bom, nesse caso, a probabilidade de obtermos, na primeira retirada, uma peça defeituosa seria a mesma do caso anterior, assim como a probabilidade de retirarmos uma peça sem defeito:

$$P(D_1) = \frac{3}{10}$$

$$P(B_1) = \frac{7}{10}$$

Já na segunda retirada é necessário que se façam algumas observações, como por exemplo:

- Se a primeira peça retirada for defeituosa, então a probabilidade de obtermos outra peça defeituosa na segunda retirada é:

$$P(D_2) = \frac{2}{10}$$

- Se a primeira peça retirada for boa, então a probabilidade de obtermos uma peça defeituosa na segunda retirada é:

$$P(D_2) = \frac{3}{10}$$

Esse exemplo nos mostra a necessidade de uma definição para a probabilidade condicionada.

PROBABILIDADE CONDICIONADA: Uma definição matemática de independência dos eventos inclui o sentido intuitivo. O que vimos até agora sobre independência entre dois eventos pode auxiliar na definição de probabilidade condicionada:

DEFINIÇÃO: Sejam A e B dois eventos, onde $P_z(A) \neq 0$. A probabilidade de ocorrer o evento B dado que ocorreu um evento A é:

$$P_z(A|B) = \frac{P_z(A \cap B)}{P_z(A)}$$

Vejamos um exemplo:

Com base no exemplo anterior, mas agora as retiradas feitas sem reposição, qual a probabilidade de retirarmos duas peças defeituosas?

Resolução:

Bom, a probabilidade de obtermos uma peça defeituosa na primeira retirada é $\frac{3}{10}$. Além disso, $P(D_2|D_1) = \frac{2}{9}$. Logo:

$$P[(D_1, D_2)] = P(D_1 \cap D_2)$$

$$= P(D_1) \times P(D_2|D_1) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

Referências:

[1] RÖNDIGS, O. **Grundkurs Mathematik**, Alemanha, p. 117-127, 2013;

[2] Disponível em: < <http://www.portaaction.com.br/probabilidades/14-eventos-independentes-e-probabilidade-condicional> >. Acesso em: 25 de outubro de 2015.

A Matemática e a Música tem alguma relação?

Stephanie Abé, *Autor, UFSM,*

COM a evolução do homem e com o surgimento das civilizações passou-se a ter a necessidade de estruturar e organizar a vida em grupo. Foi nessa época que a matemática mostrou seus primeiros indícios, já que era necessário estruturar atividades como contar, calcular, trocar, vender, entre outras. Nesse sentido, as primeiras evidências de contagem estavam ligadas ao pastoreio, onde os pastores controlavam seus rebanhos usando montes de pedras. E, a partir disso, surgiram os primeiros sistemas de numeração. Então, o que se pode perceber é que a matemática surgiu há muito tempo com o intuito de resolver problemas práticos da época e foi evoluindo até chegar ao que conhecemos hoje em dia.

A música também surgiu a muito tempo, mais precisamente na pré-história, onde o homem já criava diversos sons fazendo batucadas até chegar em uma melodia. Assim, a música tem praticamente a mesma idade do homem, e foi com a evolução das batucadas do homem pré-histórico que chegamos ao que conhecemos hoje.

Dessa forma, é possível observar que a música e a matemática não são áreas “novas”, mas será que existe uma relação entre esses dois ramos aparentemente independentes? É isso que pretende-se descobrir ao longo desse texto.

Os povos antigos tinham um grande fascínio pela música. Grandes filósofos, que também eram matemáticos, estavam incluídos nessa estatística. Assim, muitos deles também se interessaram em estudar música. Dentre eles, começa-se destacando Pitágoras. “Pitágoras compunha e tocava lira desde muito jovem. E a música, para ele, tinha várias finalidades, inclusive pedagógicas: a purificação da mente, a cura de doenças, o domínio da raiva e da agressividade do homem, dentre outras coisas.” (PEREIRA, 2013) Por gostar tanto da música, ele estava interessado em entender aquilo que hoje chamamos de harmonia, ou seja, estudar a combinação de sons tocados simultaneamente.

Assim, Pitágoras é citado como o inventor do monocórdio, um instrumento musical de uma corda, onde esta está presa entre dois cavaletes fixados em uma tábua, em que ele dividiu em 12 intervalos iguais. Com o tempo, e conforme tocava seu instrumento, Pitágoras pode perceber uma relação entre os números e os sons: havia uma relação entre o comprimento da corda e os sons agradáveis; a esta relação ele deu o nome de harmonia musical. O que ele percebeu é que tocando a corda solta (comprimento c) e precionando a corda em determinadas razões do comprimento ($\frac{c}{2}$, $\frac{2c}{3}$ e $\frac{3c}{4}$) havia a harmonia. A partir dessa proporção simples que relaciona números com sons harmoniosos, Pitágoras fez a descoberta da primeira escala musical, que era formado pelos quatro sons agradáveis descobertos por ele. Esta escala ficou conhecida como Escala Pitagórica. Vale ressaltar, que para a descoberta dos sons harmoniosos não importava o comprimento da corda do instrumento, mas sim a razão que Pitágoras obteve.

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado por Pitágoras descobriu-se outros sons harmoniosos até se chegar na Escala Diatônica de DÓ, que possui sete notas musicais mais o DÓ₂, o que a transforma em uma escala de oito notas. Mas os estudos referentes a música não pararam por aí, pois o que os músicos realmente queriam era a construção de uma escala perfeitamente simétrica em todas as suas totalidades.

Arquitas de Tarento, filósofo, político, matemático e seguidor de Pitágoras, também contribuiu ao estudo da música. Ele construiu uma escala musical baseada nas médias aritmética e harmônica. Esta escala ficou conhecida como Escala de Arquitas e manteve as oito notas musicais. Assim, Arquitas foi mais além. Ele obteve uma relação entre as médias da qual era obtida a frequência entre dois tons, isto é, fazendo o quociente entre as médias aritmética e harmônica era possível determinar o intervalo de frequência entre dois tons. Mas ainda era necessário determinar outras notas para se obter a escala perfeitamente simétrica.

Até a Idade Média, o modelo de escala mais aceita era a proposta por Pitágoras, mas haviam outros. Os músicos do Ocidente basearam seu estudo no erro da Escala Pitagórica, onde perceberam que o intervalo entre as frequências das notas não era sempre o mesmo. Acredita-se que os pitagóricos não conseguiriam reparar esse erro, visto que só trabalhavam com números inteiros e racionais, deixando de lado os irracionais já que estes não poderiam ser escritos como razão de dois números inteiros. Então, com o Renascimento, surgiram-se novas ideias. Os músicos começaram a perceber a necessidade de transpor melodias para outras tonalidades, o que não era possível na Escala Pitagórica. Após estudos, percebeu-se que a solução era o temperamento da escala, isto quer dizer, dividir as notas de modo que o intervalo entre elas seja sempre o mesmo. Além das notas serem equidistantes, foram incluídas cinco notas musicais entre algumas das sete que já compunham a Escala Diatônica. Esse temperamento foi proposto por Andréas Werckmeister e a escala recebeu o nome de Escala Temperada e passou a ter doze notas. Sua principal característica é o fato de que as notas estão igualmente espaçadas. Esses intervalos entre as notas, hoje são conhecidos como semitons.

Portanto, é possível perceber que por trás do estudo da música e da construção das escalas musicais há muita matemática envolvida. Assim, a música é mais uma das muitas áreas que estão relacionadas com a matemática!

Referências:

[1] PEREIRA, M. C. Matemática e Música: De Pitágoras aos Dias de Hoje. 2013. 95f. Dissertação (mestrado em matemática)-Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), Rio de Janeiro.

Matemática: ensino básico versus graduação

Tauana Dambrós, *Autor, UFSM*, Dioggo Dresch, *Autor, UFSM*, Fabiano Costa D'avila, *Autor, UFSM*

GRANDE parte dos alunos ingressos no curso de matemática, sejam licenciandos ou bachareis, egressos de escola pública, sentem uma dificuldade considerável no primeiro semestre. Vindo de uma educação básica com deficiências, o graduando entra para uma universidade com a ideia que aulas de matemática seguem a linha conceito, fórmula e resolução de exercícios.

Nas escolas, as aulas da área das exatas mantêm sempre uma mesma estrutura. Primeiramente o professor introduz o assunto que será trabalhado, de maneira bem superficial. Em seguida passa uma fórmula geral, apresenta exemplos resolvidos da matéria, e propõe exercícios de fixação que seguem a mesma estrutura de aplicação dos exemplos apresentados, mudando apenas números.

No momento que o aluno entra na graduação esse fato se torna um dos grandes motivos de reprovações e desistências. Pois se depara com questões muito mais abrangentes, que envolvem raciocínios lógicos, definições e demonstrações de conceitos básicos, já vistos anteriormente, combinados com novos conceitos.

Sendo realizada uma mudança na maneira de pensar, na qual se precisa muito mais raciocínio e se percebe que a fórmula antes jogada no quadro negro, copiada e decorada sem uma justificativa, como um conceito verdadeiro e inquestionável, tem algo a mais por trás. Quando se está no ensino médio não sabemos para que aquela fórmula, que o professor coloca na lousa, serve na prática. Não entendemos os conceitos envolvidos.

Esse déficit faz com que o discente ao se deparar com um problema desconhecido, que julga não conhecer a fórmula para resolvê-lo, o deixa de lado e desiste, mesmo às vezes tendo capacidade para desenvolvê-lo. Falta ao recém-graduando a coragem para tentar uma solução alternativa.

Difícilmente encontra-se professores que induzem o estudante a pensar: como poderia ser feito uma fórmula para que aquela ordem seja seguida? Por exemplo, utilizando um estudo de casos diferentes para achar uma relação entre eles.

A preocupação do professor em muitos aspectos deixou de priorizar a aprendizagem, para preocupar-se com a quantidade de conteúdo trabalhado, o mesmo não provoca a curiosidade do aluno. Estas situações tem levado a preocupação de muitos pesquisadores, na área de educação matemática, os quais se questionam: de que maneira ensinar matemática hoje?

Em uma geração que a tecnologia está em alta, chamar a atenção para a aula tradicional, com conteúdo passado no quadro negro explicado e copiado, não é mais suficiente. O governo percebendo isso disponibilizou a maioria das escolas laboratórios de informática. Os educadores matemáticos, todavia não conhecem os softwares que podem ser usados para ensinar matemática de uma maneira diferente e criativa. As

inovações estão muitas vezes disponíveis, contudo, devido ao não conhecimento das utilidades delas não são utilizadas.

Falta buscar interesse no ensino básico, tanto do aprendiz como do professor, visando que o futuro graduando precisa ter curiosidade e um perfil de pesquisador. A mudança no ensino trazendo uma disciplina, conhecida como Seminário Integrado, visando a integração de diferentes disciplinas, voltada a pesquisas, desenvolvida no ensino médio, tem ajudado. Contudo não é o suficiente para a área das exatas, pois o mito de que as fórmulas foram feitas por gênios, como se simplesmente elas foram adivinhadas, são inquestionáveis e que não existe maneira para prová-las permanece tanto quanto a ideia de que conteúdos matemáticos distintos não tem ligação nenhuma entre si.

O aluno por si próprio não desenvolve grande interesse pela matemática aprendida em ambiente escolar, pois esta parece estar distanciada da vida. São grandes as assombrações e mistificações que giram em torno da mesma, dizendo que é a mais difícil, que não tem sentido, que aquelas fórmulas terríveis não são usadas pra nada. Mas na verdade ele as usa no cotidiano inconscientemente, por exemplo, ao comparar o preço em relação a diferentes quantidades de um determinado produto no supermercado usa-se regra de três.

Não é o ensino básico que está totalmente fraco, pois é dada aos alunos a noção necessária da maioria dos conteúdos. O que tem faltado é oferecer uma melhor formação continuada ao educador e desenvolver seu raciocínio lógico juntamente com o do educando. Fazer o educando pensar por si próprio e assimilar conteúdos distintos em momentos diferentes, pois é no momento que pensamos e tentamos várias vezes que entendemos como fazer, aprendemos a ideia da resolução do problema. Falta um pouco da curiosidade, falta fazer o que Pablo Picasso dizia **“Sempre faça o que não consigo fazer para aprender o que não sei”**.

Referências:

- [1] D'AMBRÓSIO, Beatriz. COMO ENSINAR MATEMÁTICA HOJE? Disponível em: <<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br>> Acesso em 12 de out. 2015;
- [2] SOARES, Fernando G.E.P. AS ATITUDES DE ALUNOS DO ENSINO BÁSICO EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA E O PAPEL DO PROFESSOR. 27ª Reunião Emanped. Caxambú - MG de 21 nov. á 24 nov. de 2004. Disponível em: < <http://www.ufrj.br/emanped/paginas/home.php?id=27> >. Acesso em 14 de out. 2015.

Estatísticas no Futebol Americano

Carmen Vieira Mathias, *Orientador, UFSM*, Lucas Schimith Zanon, *Autor, UFSM*,



Fig. 1. Brasil Onças

OFUTEBOL AMERICANO é um dos esportes mais famosos dos Estados Unidos, porém no Brasil está apenas começando, a cerca de seis anos foi fundado um time aqui em Santa Maria, chamado Santa Maria Soldiers, um time não profissional que atua sem fins lucrativos, apenas pelo prazer de jogar. A matemática tem um papel muito importante neste esporte, por ser um jogo mais “pausado” e uma jogada executada por vez, assim com a ajuda de estudos como a estatística podemos achar certas tendências de um time, com base em jogos anteriores.

O que pode ser analisado?

Bom, o futebol americano é um pouco diferente dos esportes populares no Brasil, tem um time de ataque e um time de defesa. Resumidamente, o ataque tem quatro tentativas para avançar 10 jardas, quando consegue, “recebe” mais quatro tentativas para as próximas dez jardas. Nisso pode ser avaliado qual a jogada mais utilizada por eles na primeira tentativa, quando uma jogada deles da errado (perdem jardas) o que eles frequentemente fazem a seguir. Assim concluindo as maiores probabilidades e tendências do time adversário.

A estatística é um ramo da matemática que coleta, analisa e interpreta dados numéricos no estudo de fenômenos naturais, econômicos e sócias. E também pode ser usado nos esportes com o proposito de “prever” jogadas do time adversário. Todos técnicos tem certas tendências (como correr ou passar mais), então os times de Futebol Americano nos estados unidos contratam estatísticos para analisar os outros times, resultando em um jogo cada vez mais técnico.

Jeff Dominitz é um exemplo, que no ano de 2006 trocou seu emprego de professor na faculdade de Carnegie Mellon para trabalhar no time de futebol americano Washinton Redskins.

Em Washinton ele ajudou o técnico principal, analisando os seus adversários e criando estatísticas referentes aos mesmos. Incentivando os outros times a procurarem trabalhadores no ramo da estatística. “the culture has changed exponentially in the last 12 months” (a cultura mudou exponencialmente nos últimos 12 meses) disse John Pollard, um dos diretores gerais da STATS L.L.C (uma companhia de estatística e tecnologia esportiva)

Este ano o Brasil jogou pela primeira vez no campeonato mundial de futebol americano, um técnico americano ajudou o time de defesa da seleção utilizando este sistema de estatística. “Nosso técnico nos mandou os dados da Austrália após analisar o jogo Austrália x Coreia do Sul. Nestes dados dizia o que eles fariam caso estivessem em tal formação, qual jogada dava mais certo contra eles[...]E quando jogamos contra a Austrália sentíamos como se já sabíamos exatamente o que eles iriam fazer a cada jogada. Isto facilitou muito o jogo para nossa defesa!” Cita o jogador Vinicius Zanon (#94 Defensive end) da seleção brasileira.

Estatística é um estudo que pode ajudar em vários esportes, e o desenvolvimento deste estudo pode ajudar o Brasil a melhorar cada vez mais no Futebol Americano.

Referências:

- [1] **More N.F.L. Teams Hire Statisticians but Their Use Remains Mostly Guarded**, disponível em: < [http : //mobile.nytimes.com/2012/11/25/sports/football/more-nfl-teams-hire-statisticians-but-their-use-remains-mostly-guarded.html?refererξ_r=1](http://mobile.nytimes.com/2012/11/25/sports/football/more-nfl-teams-hire-statisticians-but-their-use-remains-mostly-guarded.html?refererξ_r=1) > acessado em 18 out. 2015 ;
- [2] **Guia do Estudante, Estatística**, disponível em: < [http : //guiadoestudante.abril.com.br/profissoes/ciencias-exatas-informatica/estatistica-686049.shtml](http://guiadoestudante.abril.com.br/profissoes/ciencias-exatas-informatica/estatistica-686049.shtml) > acessado em 18 out. 2015 ;
- [3] **Santa Maria Soldiers**, disponível em < [https : //www.facebook.com/sm.soldiers/info/?tab=page_info](https://www.facebook.com/sm.soldiers/info/?tab=page_info) > acessado em 18 out. 2015;
- [4] **Fig. 1 Ufanismo Nacional: Torneio Touchdown e Mundial de FA**, disponível em < [https : //ufanismo-nacional-torneio-touchdown-e-mundial-de-fa/#more-1167](https://ufanismo-nacional-torneio-touchdown-e-mundial-de-fa/#more-1167) > acessado em 18 out. 2015;

Café: História e Curiosidades

Dominiki Ribas, *Autor, UFSM,*

“A amizade é semelhante a um bom café, uma vez frio, não se aquece sem perder bastante do primeiro sabor.”

Immanuel Kant

O sabor, a fragrância, ou o efeito estimulante levam o café a ser a bebida mais consumida no mundo. A origem do café se dá pela magia e mistério de sua lenda, onde um pequeno pastor Kaldi, observou que quando suas cabras degustavam de uma pequena frutinha vermelha ficavam mais alegres e enérgicas. Ao relatar sua observação ao monge da região, este levou o café ao monastério para o ajudar a controlar o sono durante suas orações. A notícia se espalhou por todos os monastérios e posteriormente pelo mundo. Evidências mostram que o primeiro cultivo do café se deu em um monastério no Yemen.

O mistério do café não está presente somente em sua origem mas também na sua propagação, os árabes obtinham o controle sobre o cultivo do café e era proibido que estrangeiros chegassem perto das plantações de café. Os grãos eram guardados a sete chaves e considerados moeda de troca entre os europeus.



Fig. 1. Quadro Colheita de Café de Johann Moritz Rugendas

No Brasil, o cultivo do café se deu no norte do Pará, em 1727, e se espalhou rapidamente, por nossas condições climáticas o sucesso do cultivo e da comercialização era absoluto até 1929 com a queda da bolsa de Nova York. Onde milhares de bolsas de café e plantações foram queimadas devido á queda do preço. Com o reestabelecimento da economia o café já havia perdido espaço para a industrialização do governo de Getúlio Vargas.

Nos dias de hoje a produção de café no Brasil se concentra na região sudeste, fazendo do país o maior produtor de café do mundo e o segundo maior consumidor da bebida, somente atrás dos Estados Unidos.

Por conter cafeína, o café agrega a cada dia mais consumidores e pesquisas são cada vez mais frequentes, e suas conclusões mais empolgantes. Uma pesquisa ressaltou que o café ajuda no tratamento da depressão, fazendo a pessoa se sentir mais animada e feliz após o consumo da bebida.

A bebida é contraindicada a grávidas, pois pode causar a má formação do feto e até abortos. O consumo exagerado pode levar ao vício, e causar enfraquecimento do organismo,

devido ao seu efeito diurético causando perdas de vitaminas e minerais.



Fig. 2. Chávena de Café.

Curiosidades sobre o Café:

- Mais de 1400 milhões de chávenas de cafés são consumidas diariamente no mundo;
- Há uma lenda que diz que Voltaire consumia cerca de 50 xícaras de café diariamente;
- O café instantâneo foi inventado em 1906, na Guatemala por George Washington.
- O café passado sem açúcar não possui calorias.
- Na indústria do café, são empregados mais de 20 milhões de pessoas, mundialmente.
- Na Turquia, antigamente os noivos ao se casarem, prometiam um ao outro nunca faltar café em suas vidas.

Referências:

- [1] SCHWAMBACH, Charles, Café-Benefícios e Malefícios. Disponível em: <http://medicoresponde.com.br/cafe-beneficios-e-maleficios/>. Acesso em: 24 out. 2015.;
- [2] CURIOSIDADES DO MUNDO, Conheça 15 curiosidades sobre o café. Disponível em : <http://www.curiosidadesdomundo.com/conheca-15-curiosidades-sobre-cafe/>, Acesso em: 24 out. 2015.;
- [3] DICIONÁRIO WEB, Café. Disponível em: <http://www.dicionarioweb.com.br/caf%C3%A9>. Acesso em: 24 out. 2015.;
- [4] ABIC- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DA INDÚSTRIA DE CAFÉ, História. Disponível em: <http://www.abic.com.br/publique/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?sid=38>. Acesso em: 24 out. 2015;
- [5] IMAGEM.BIZ, Imagem - Xícara de café e grãos. Disponível em: <https://imagem.biz/xicara-de-cafe/>. Acesso em: 24 out. 2015.
- [6] BLOG CAFÉ FÁCIL, 30 curiosidades sobre o café. Disponível em: <http://www.cafefacil.com.br/blog/tag/30-curiosidades-sobre-o-cafe/>. Acesso em: 28 out. 2015.