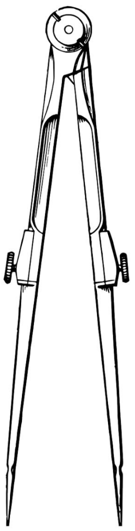
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA - RS
GRUPO PET MATEMÁTICA DA UFSM



CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO

Elaborado e revisado, no período de 2017/2019 por:

Ana Paula Stefanello
Anderson Moreira da Silva
Andréia Luisa Friske
Bruno Simões Gomes
Carmen Vieira Mathias
Carolina Dalmolin Ruviaro
Guilherme Schimanko de Godoy
Isabel Cristina Frozza
Isadora Roth
Karol Delisia Ayres Rizzotto
Laura Tiemme de Castro
Lucas Ferrari Pereira
Lucas Schimith Zanon
Luiza Santos Morin
Maisa Iora
Maria Antônia Schossler da Rosa
Moisés Rutkoski
Quendra Silva Cartier
Ravine Taís Wenningkamp
Silvianne Amaral da Silva
Tauana Dambrós
Viviane Lopes Garcia

Revisado e atualizado no período de 2019/2020 por:

Ana Paula Stefanello
Camila Silva de Lima
Camila Taís Schuh
Carlos Daniel Raminelli
Emilly Rigue
Enzo Massaki Ito
Gabriel Neves da Silva
Gustavo Streppel de Oliveira
Inês Farias Ferreira
Isadora Roth
Luísi Emanuelly Silveira do Nascimento
Mário Henrique Soriano Rosa
Paola Nascimento Brum
Viviane Lopes Garcia

PET Matemática - UFSM

Apresentação

Esta apostila foi constituída a partir de uma pesquisa coletiva do grupo PET Matemática que teve início em março de 2017. Inicialmente, foi estudada a obra intitulada Desenho Linear Geométrico de autoria de Theodoro Braga, publicada em 1997 em sua 14ª edição. O autor, nessa obra, aborda conteúdos de Geometria Euclidiana Plana por meio de construções geométricas com régua e compasso distribuídos em 12 capítulos. O grupo PET considerou a escolha do tema pertinente por ser, a Geometria Euclidiana, uma área do conhecimento matemático que permeia os diferentes anos letivos da Educação Básica, desde os anos iniciais, estendendo-se até o Ensino Superior, mais especificamente, no curso de graduação em Matemática, seja na Licenciatura ou no Bacharelado, onde tem-se ao menos duas disciplinas que versam sobre o tema. A partir dessa pesquisa, o grupo se propôs a elaborar um material bibliográfico constituído por atividades que essencialmente fazem uso de construções geométricas por meio de régua e compasso, a fim de que pudessem subsidiar a realização de minicursos a serem ofertados aos acadêmicos do Curso de Matemática – Licenciatura e Bacharelado. Nesse sentido, o software de matemática dinâmica, GeoGebra, foi utilizado como uma ferramenta de apoio para a elaboração de sequências de imagens que pudessem ilustrar visualmente as construções indicadas nas atividades propostas ao longo de nove capítulos. A presente versão foi totalmente revisada e atualizada em termos de formatação textual, redação e imagens em relação a versão produzida entre o período de 2017 à 2019. Como este material bibliográfico estará disponível no site oficial do grupo, espera-se que esse possa contribuir como recurso de apoio na formação inicial de acadêmicos de cursos de Matemática Licenciatura e Bacharelado de diferentes instituições de Ensino Superior. Bem como, servir de referencial para minicursos que possam ser dinamizados pelo grupo relacionados ao assunto.

Santa Maria, Fevereiro de 2020.
Grupo PET Matemática - UFSM

Sumário

Capítulo 1

Linhas Retas

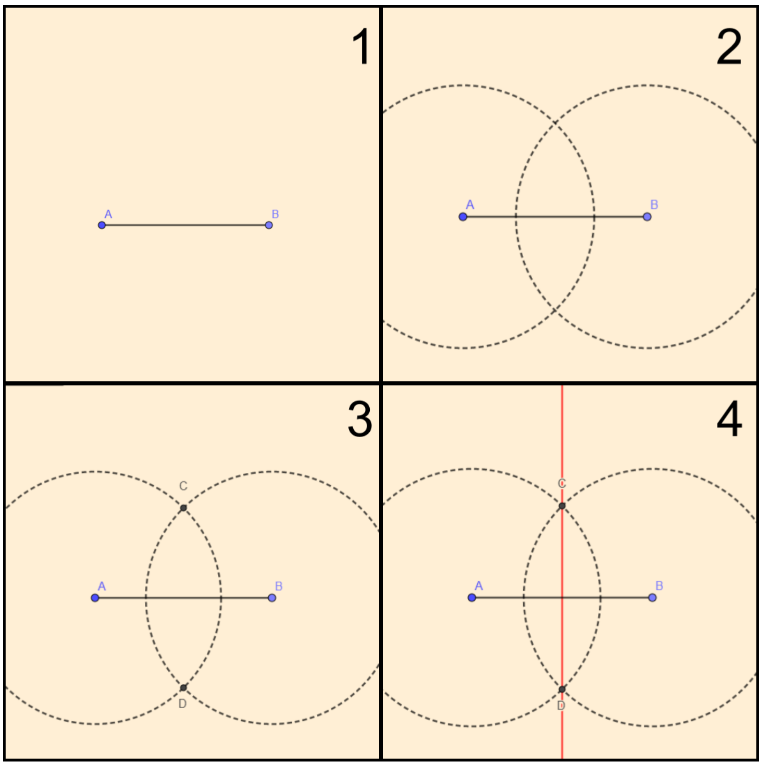
1.1 Determinar a mediatriz de um segmento $\overline{AB}$.

Passos:

1. Considerar o segmento $\overline{AB}$;
2. Traçar uma circunferência com centro em A e abertura do compasso maior que a metade de $\overline{AB}$. Repetir o processo para o ponto B com a mesma abertura do compasso;
3. Marcar os pontos C e D de intersecção das circunferências;
4. Os pontos C e D determinam a reta procurada.

A Figura 1.1 ilustra os passos da construção.

Figura 1.1: Construção 1.1



1.2 Dada uma reta r e um ponto C fora dela, traçar uma reta perpendicular a r passando por C.

Passos:

1. Considerar a reta r e um ponto C não pertencente a ela;

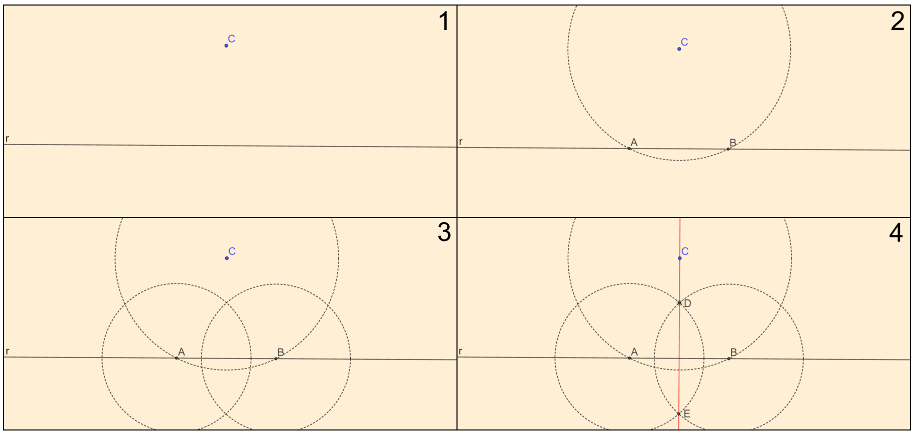
2. Traçar uma circunferência com centro em C e abertura do compasso maior que a distância de C a r. Marcar os pontos A e B de intersecção dessa circunferência com a reta r;

3. Traçar uma circunferência com centro em A e abertura do compasso maior que a metade de $\overline{AB}$. Repetir o processo para o ponto B com a mesma abertura do compasso;

4. Marcar D e E, pontos de intersecção dessas circunferências. Eles determinam a reta procurada.

A Figura 1.2 ilustra os passos da construção.

Figura 1.2: Construção 1.2



.

1.3 Dada uma reta r e um ponto C sobre ela, traçar uma reta perpendicular a r passando por C.

Passos:

1. Considerar uma reta r e um ponto C sobre ela;

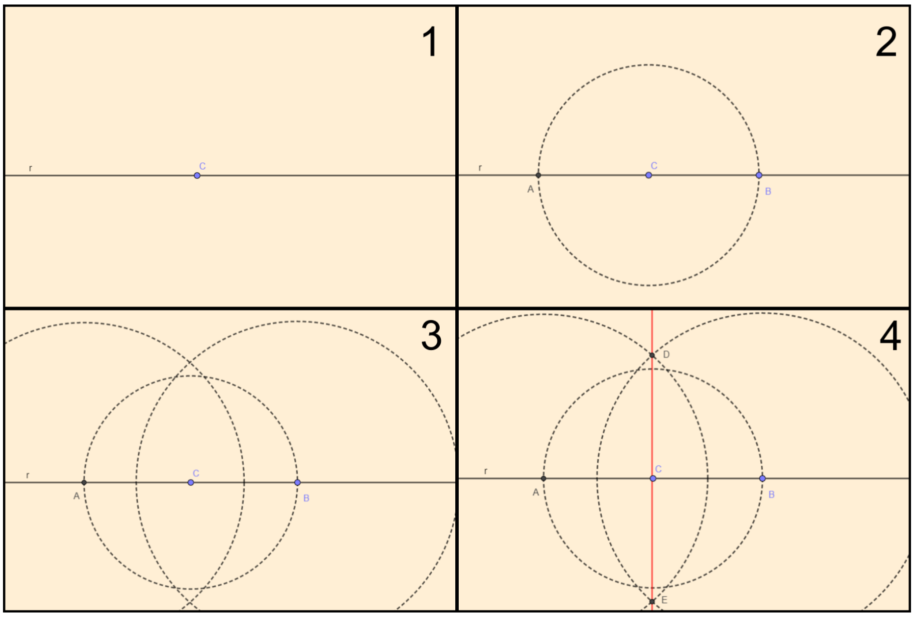
2. Traçar uma circunferência com centro em C. Marcar os pontos A e B de intersecção desta circunferência com a reta r;

3. Traçar uma circunferência com centro em A e abertura do compasso maior que a metade de $\overline{AB}$. Repetir o processo para o ponto B com a mesma abertura do compasso;

4. Marcar D e E, pontos de intersecção dessas circunferências. Eles determinam a reta procurada.

A Figura 1.3 ilustra os passos da construção.

Figura 1.3: Construção 1.3



1.4 Dados uma reta r e um ponto C fora dela, determinar o seu simétrico em relação a r.

Passos:

1. Considerar a reta r e um ponto C não pertencente a ela;

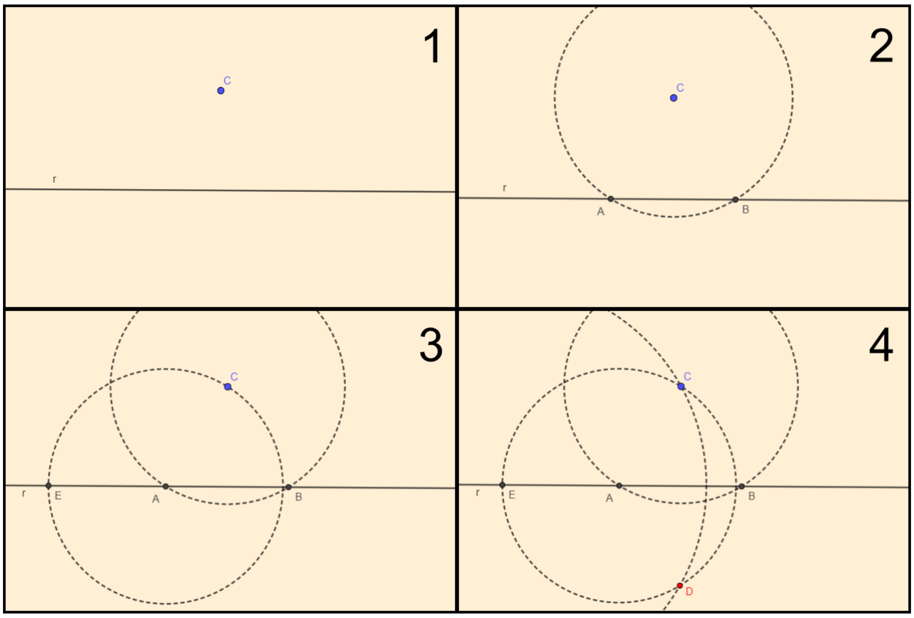
2. Traçar uma circunferência com centro em C e abertura do compasso maior que a distância de C a r. Marcar A e B, pontos de intersecção dessa circunferência com a reta r;

3. Traçar uma circunferência com centro em A e raio igual a medida de $\overline{AC}$ que intercepta r em E;

4. Traçar outra circunferência com centro em E e raio igual a medida de $\overline{EC}$ e marcar o ponto D de intersecção com a circunferência anterior, que é o ponto procurado.

A Figura 1.4 ilustra os passos da construção.

Figura 1.4: Construção 1.4



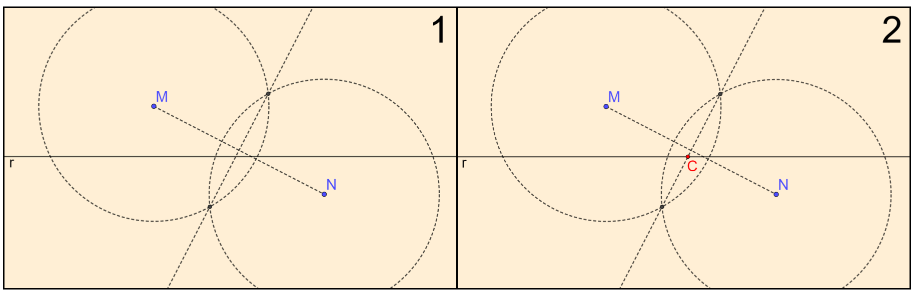
1.5 Dados uma reta r e dois pontos M e N fora dela, determinar um ponto C em r que equidista de M e N.

Passos:

1. Traçar a mediatriz do segmento $\overline{MN}$;
2. Marcar C ponto de intersecção da mediatriz com a reta r.

A Figura 1.5 ilustra os passos da construção.

Figura 1.5: Construção 1.5



Observação: Se os pontos M e N estiverem no mesmo semiplano em relação à r a construção é análoga. Porém, o segmento $\overline{MN}$ não pode formar um ângulo reto com ela.

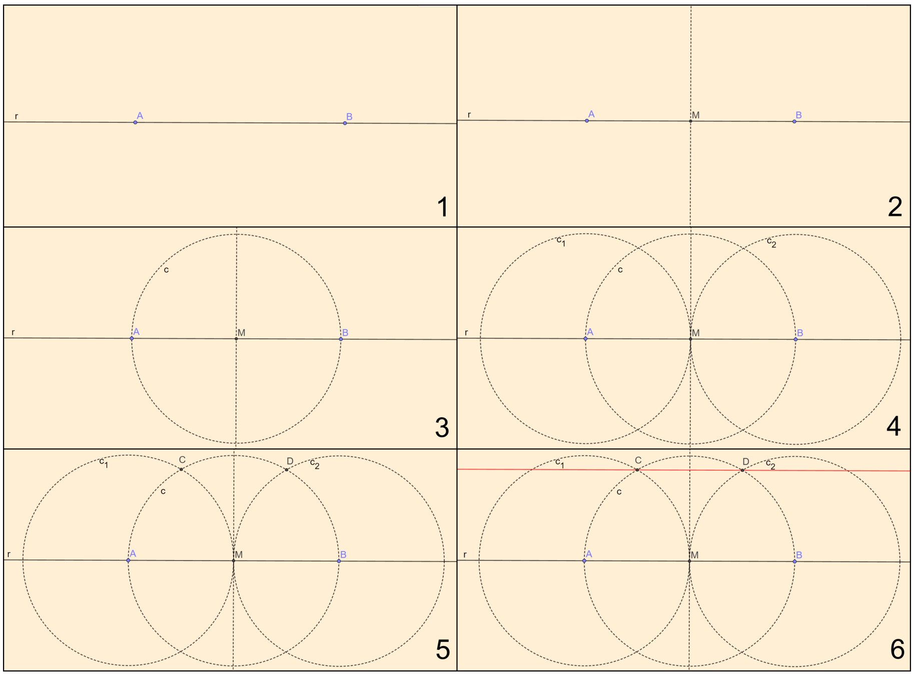
1.6 Dada uma reta r, traçar uma paralela a ela.

Passos:

1. Marcar A e B pontos distintos em r;
2. Traçar a mediatriz de $\overline{AB}$ e marcar o ponto M, intersecção dessa com a reta r;
3. Traçar a circunferência c centrada em M e abertura do compasso igual a medida do segmento $\overline{MA}$;
4. Traçar as circunferências c_1 e c_2, centradas em A e B, respectivamente, com a mesma abertura do compasso;
5. Marcar C e D, pontos de intersecção das circunferências c_1 e c_2 com c;
6. Traçar a reta que passa pelos pontos C e D, sendo essa a reta procurada.

A Figura 1.6 ilustra os passos da construção.

Figura 1.6: Construção 1.6



1.7 Dados uma reta r e um ponto C fora dela, traçar uma paralela a r passando por C.

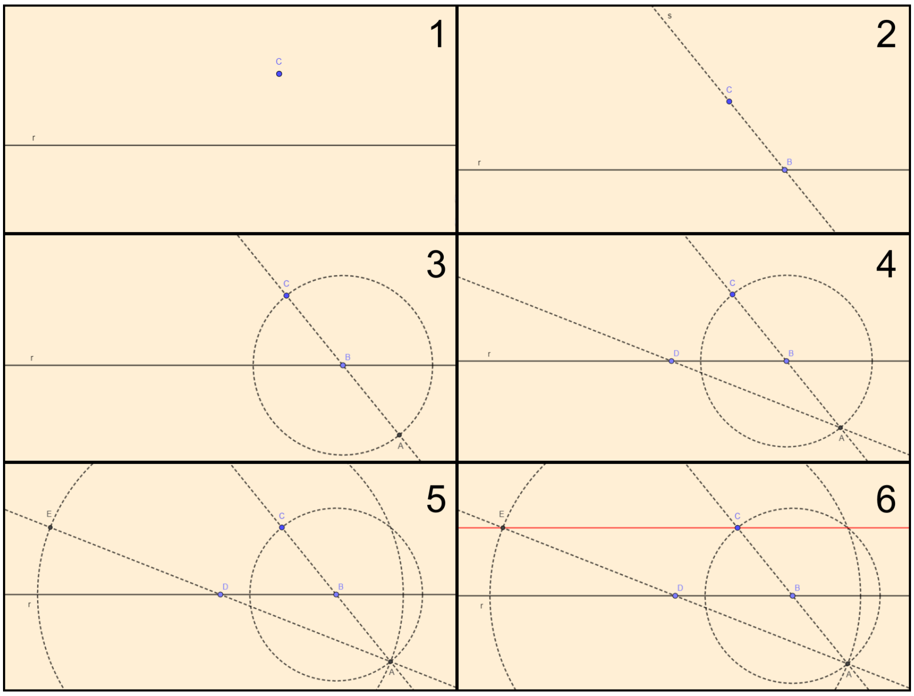
Passos:

1. Considerar a reta r e um ponto C não pertencente a ela;
2. Traçar uma reta s passando por C que intercepta r em um ponto B;
3. Marcar sobre s um ponto A, tal que as distâncias dos segmentos $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$ sejam iguais;
4. Traçar por A uma reta oblíqua que intercepta r em um ponto D;
5. Marcar o ponto E sobre a reta determinada por A e D tal que $\overline{DE}$ e $\overline{AD}$ possuam mesma medida;

6. A reta que passa pelos pontos C e E, é paralela à reta r.

A Figura 1.7 ilustra os passos da construção.

Figura 1.7: Construção 1.7



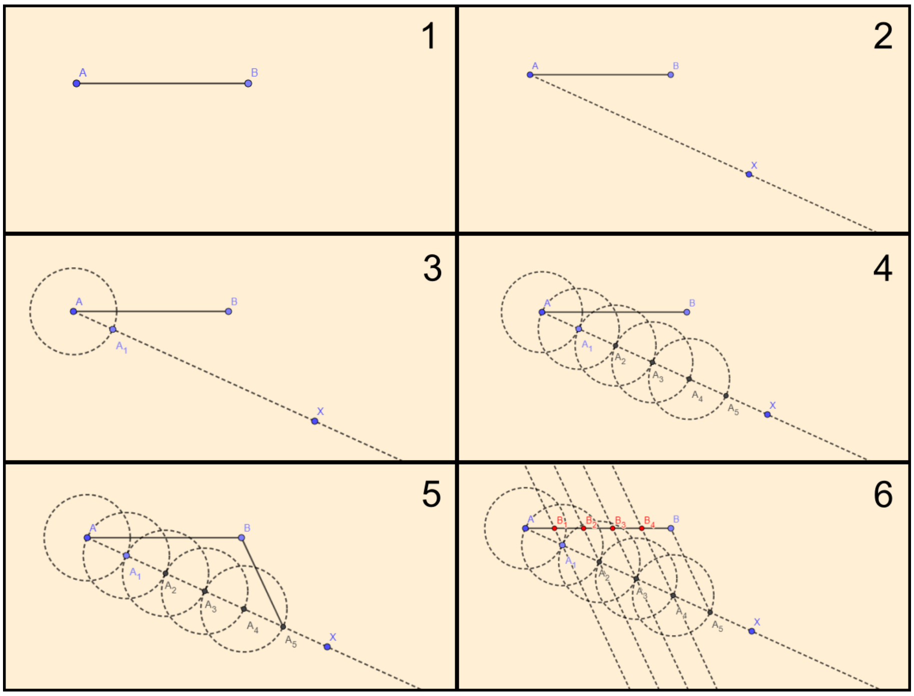
1.8 Dado um segmento $\overline{AB}$, dividi-lo em cinco partes iguais.

Passos:

1. Considerar o segmento $\overline{AB}$;
2. Traçar a partir do ponto A uma semirreta oblíqua $\overrightarrow{AX}$;
3. Marcar, com uma abertura qualquer do compasso e centro em A, o ponto A_1 na semirreta $\overrightarrow{AX}$;
4. Repetir o processo anterior (considerando o centro do compasso no último ponto contruído) por 4 vezes, obtendo os pontos A_2, A_3, A_4 e A_5, respectivamente;
5. Traçar o segmento $\overline{A_5B}$;
6. Traçar retas paralelas a $\overline{A_5B}$, passando por A_4, A_3, A_2 e A_1 obtendo, pela intersecção das paralelas e o segmento $\overline{AB}$, os pontos B_4, B_3, B_2 e B_1. Os segmentos $\overline{AB_1}$, $\overline{B_1B_2}$, ..., $\overline{B_4B}$ são congruentes.

A Figura 1.8 ilustra os passos da construção.

Figura 1.8: Construção 1.8



Observação: De forma análoga é possível dividir um segmento em n partes de mesma medida.

1.9 Dados os segmentos $\overline{AB} < \overline{MN} < \overline{OP} < \overline{QR}$, dividi-los simultaneamente em partes iguais.

Passos:

1. Considerar os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{OP}$ e $\overline{QR}$;

2. Traçar uma circunferência com centro em A e raio igual à medida de $\overline{AB}$, repetir o procedimento com o compasso centrado em B e marcar C, intersecção das circunferências construídas. Traçar, a partir de C, as semirretas $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$;

3. Tomar um ponto M' em $\overrightarrow{CA}$ de tal forma que, com o compasso centrado nesse ponto e abertura MN, a circunferência construída intersеccione $\overrightarrow{CB}$ em um ponto N' e traçar o segmento $\overline{M'N'}$;

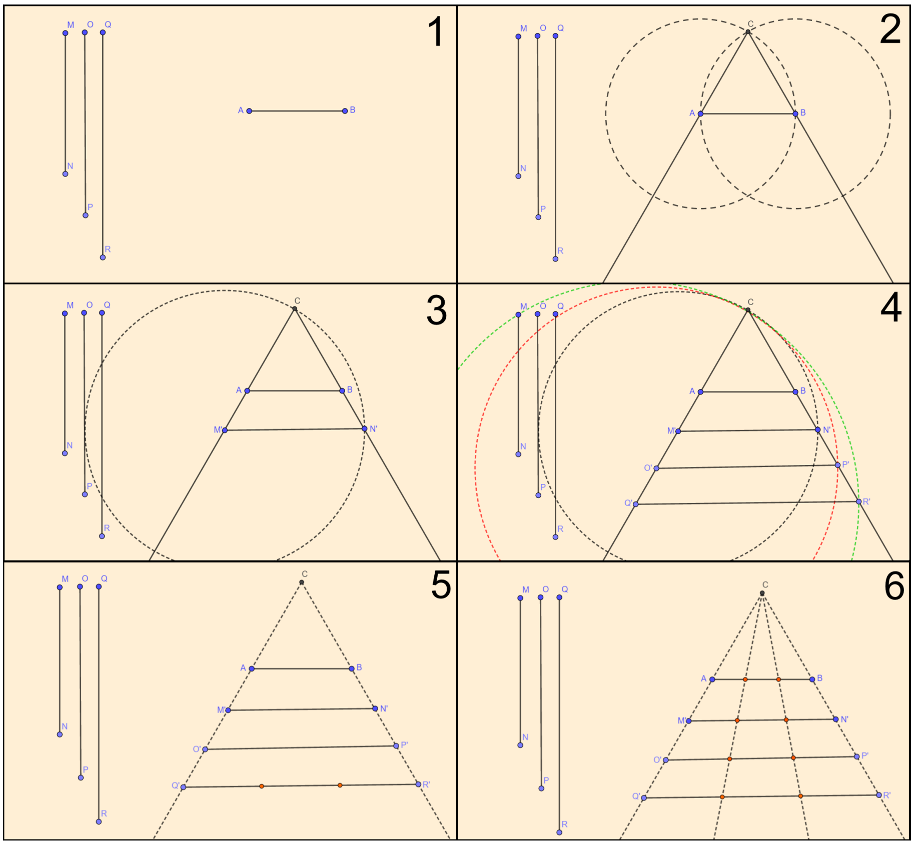
4. Repetir o processo anterior com a abertura do compasso equivalendo às medidas de $\overline{OP}$ e $\overline{QR}$. Os segmentos $\overline{M'N'}$, $\overline{O'P'}$ e $\overline{Q'R'}$ são congruentes, respectivamente, aos segmentos $\overline{MN}$, $\overline{OP}$ e $\overline{QR}$;

5. Dividir o segmento $\overline{Q'R'}$ no número de partes desejadas (como feito em 1.8);

6. Construir semirretas que unam o ponto C a cada ponto da partição. As intersecções dessas semirretas com cada segmento construído anteriormente determinam a divisão desejada.

A Figura 1.9 ilustra os passos da construção.

Figura 1.9: Construção 1.9



1.10 Dados os segmentos $\overline{AB} < \overline{MN} < \overline{OP}$, dividi-los simultaneamente em partes proporcionais.

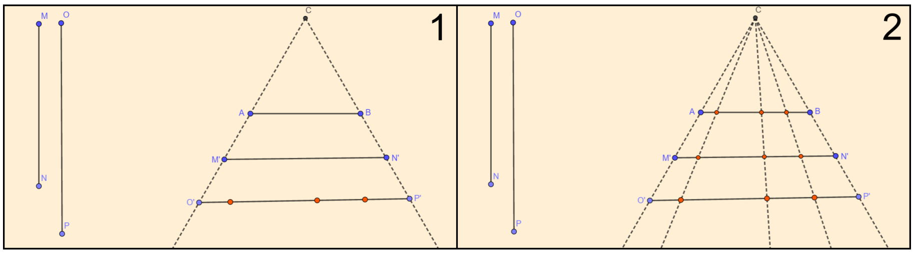
Passos:

1. Os procedimentos para realizar esta construção são idênticos aos realizados em 1.9, porém, neste caso, particionar o último segmento de forma arbitrária (não necessariamente em partes iguais);

2. Traçar as semirretas determinadas por C e as partições do segmento $\overline{O'P'}$. Os demais segmentos serão divididos na mesma proporção.

A Figura 1.10 ilustra o passo da construção.

Figura 1.10: Construção 1.10



Capítulo 2

Ângulos

2.1 Construir um ângulo congruente.

Passos:

1. Considerar um ângulo $A\hat{B}C$ de medida α e uma semirreta $\overrightarrow{DE}$;

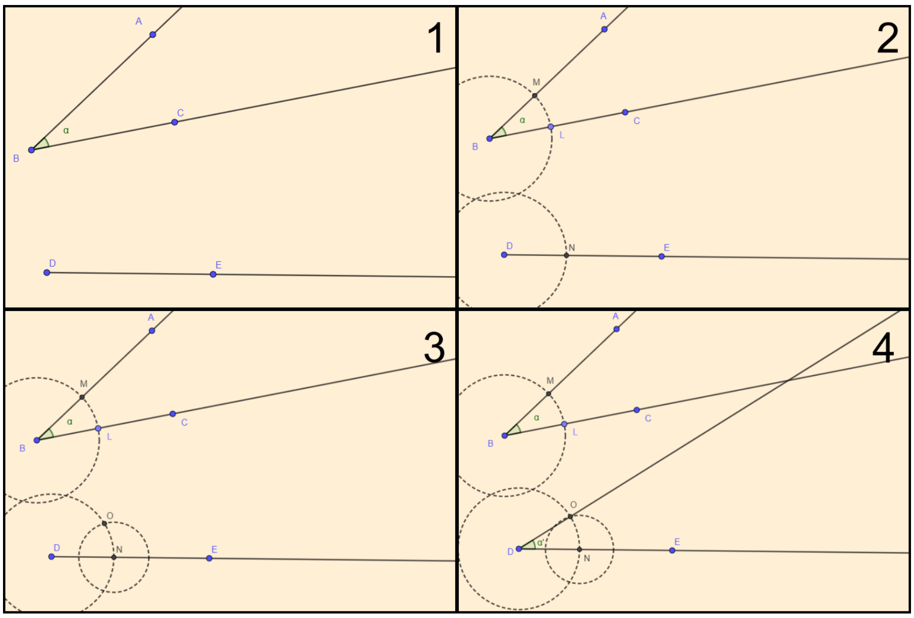
2. Traçar uma circunferência, centrada em B e com uma abertura qualquer do compasso, que intercepta os lados do ângulo nos pontos L e M. Traçar outra circunferência, centrada em D e com mesma medida, cuja intersecção com $\overrightarrow{DE}$ é o ponto N;

3. Centrar o compasso em N e, com a abertura do compasso igual à medida de $\overline{ML}$, determinar o ponto O, intersecção com a última circunferência construída;

4. Os pontos O, D e N, determinam o ângulo congruente a $A\hat{B}C$.

A Figura 2.1 ilustra os passos da construção.

Figura 2.1: Construção 2.1



2.2 Determinar a bissetriz de um ângulo.

Passos:

1. Considerar um ângulo $A\hat{B}C$ de medida α;

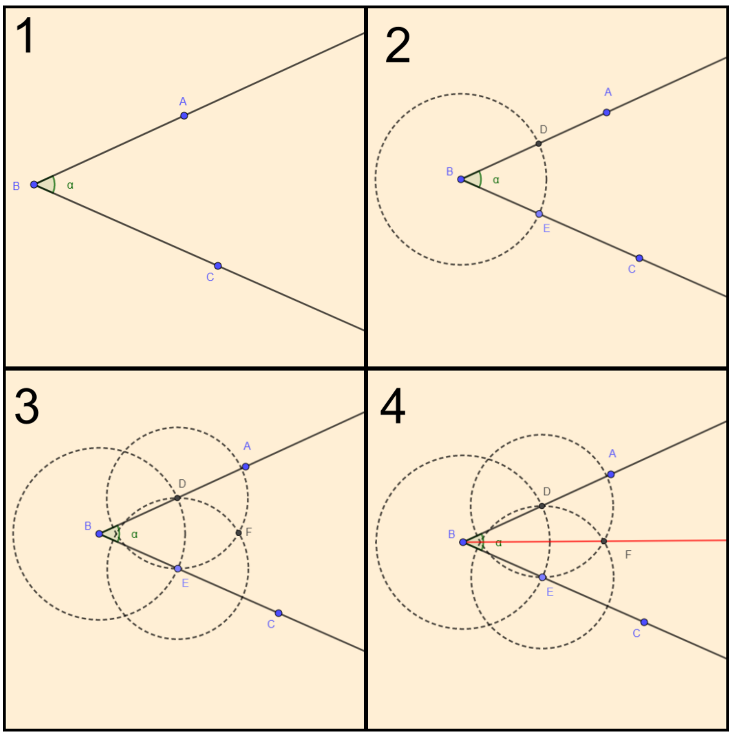
2. Traçar uma circunferência de centro em B com uma abertura qualquer do compasso. Marcar os pontos D e E nas semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, obtidos pela intersecção com a circunferência;

3. Traçar uma circunferência com centro em D e raio maior que a metade da medida do segmento $\overline{DE}$. Determinar uma circunferência com mesmo raio centrada em E. Marcar o ponto F, resultado da intersecção dessas últimas circunferências;

4. A bissetriz é determinada ao traçar a semirreta $\overrightarrow{BF}$.

A Figura 2.2 ilustra os passos da construção.

Figura 2.2: Construção 2.2



.

2.3 Determinar a bissetriz de um ângulo cujo vértice é inacessível.

Passos:

1. Considerar $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, segmentos quaisquer sobre cada lado do ângulo dado;

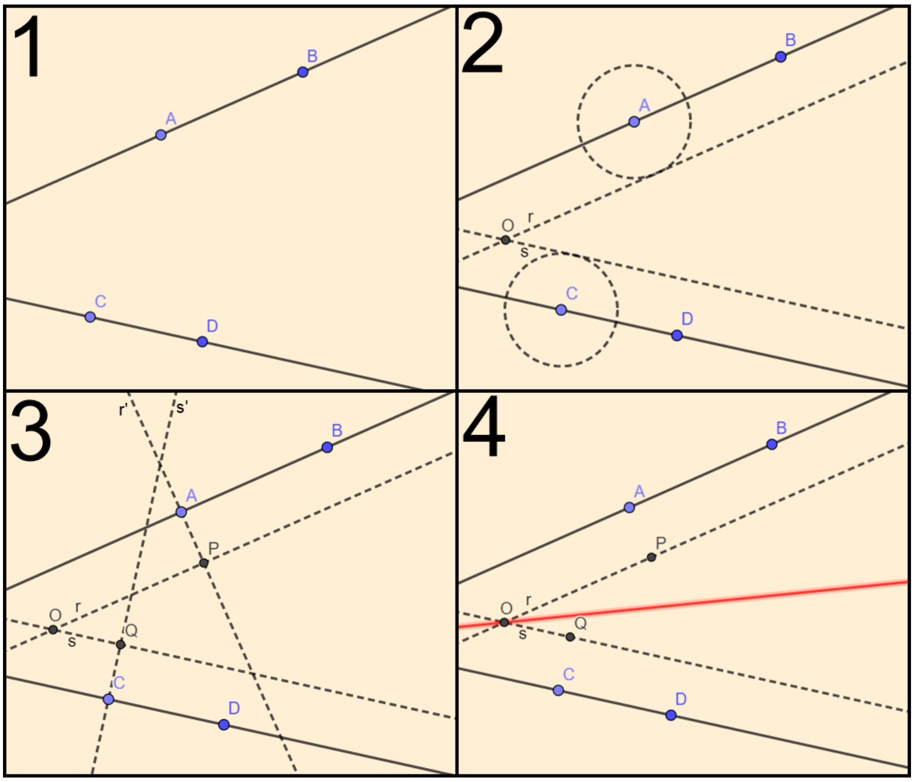
2. Traçar uma reta r paralela a $\overline{AB}$ e uma reta s paralela a $\overline{CD}$ de modo que a distância de r a $\overline{AB}$ seja igual a distância de s a $\overline{CD}$ e marcar o ponto O, intersecção de r e s;

3. Traçar r', reta perpendicular a r e que passa por A. Considerar P o pé dessa perpendicular. Determinar analogamente o ponto Q em s;

4. Traçar a bissetriz do ângulo $P\hat{O}Q$.

A Figura 2.3 ilustra os passos da construção.

Figura 2.3: Construção 2.3



2.4 Dado o ângulo reto $A\hat{B}C$, dividi-lo em três partes iguais.

Passos:

1. Considerar o ângulo reto $A\hat{B}C$;

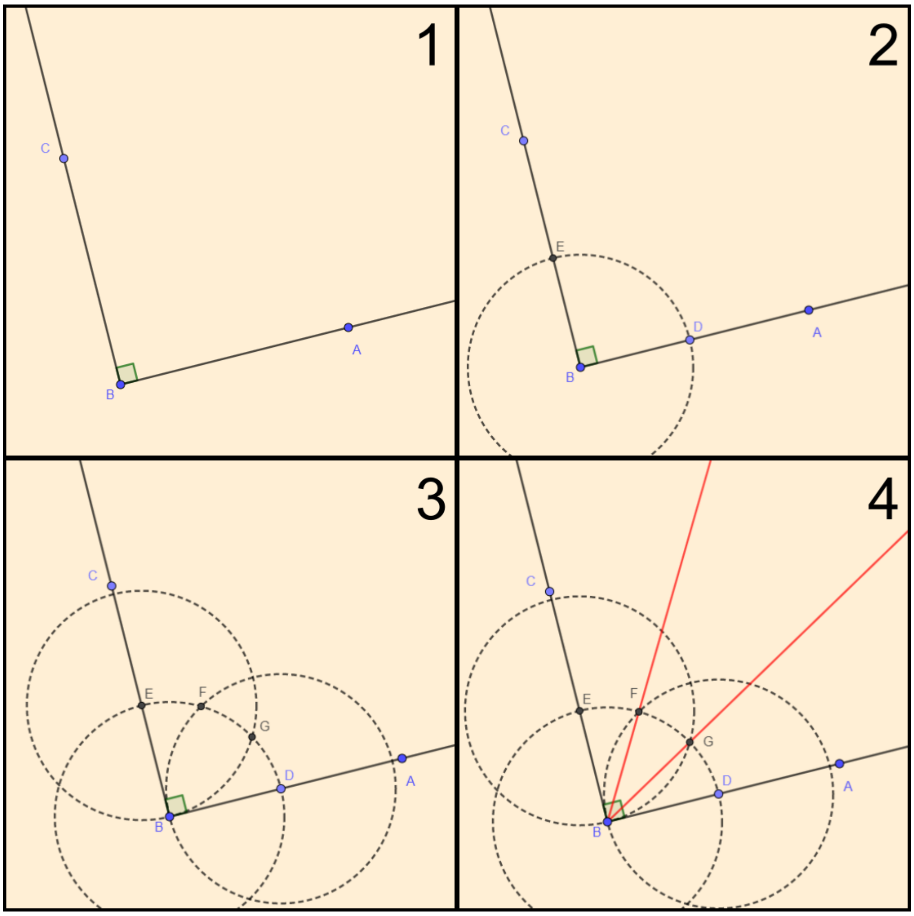
2. Traçar uma circunferência com centro em B e raio arbitrário que interseccione os lados BA e BC em dois pontos D e E, respectivamente;

3. Traçar outra circunferência com centro em D e o mesmo raio considerado no item anterior que intercepte a primeira em um ponto F. Repetir o mesmo processo para o ponto E, sendo G o ponto de intersecção com a primeira circunferência;

4. As semirretas $\overrightarrow{BF}$ e $\overrightarrow{BG}$ dividem o ângulo em três partes iguais.

A Figura 2.4 ilustra os passos da construção.

Figura 2.4: Construção 2.4



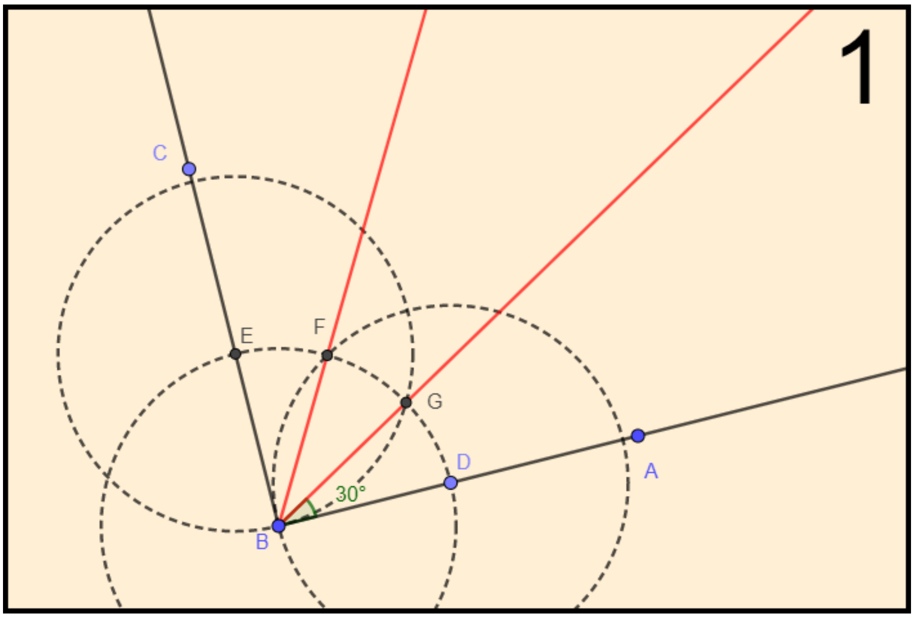
2.5 Construir um ângulo de $30°$.

Passos:

1. Tomar um ângulo reto $A\hat{B}C$, dividi-lo conforme 2.4. Cada um dos ângulos construídos mede $30°$.

A Figura 2.5 ilustra os passos da construção.

Figura 2.5: Construção 2.5



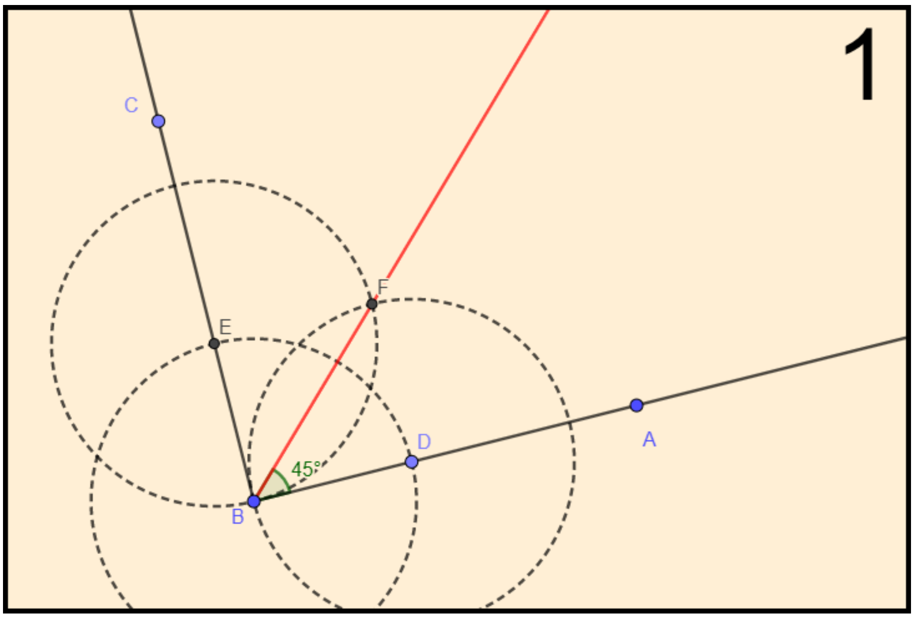
2.6 Construir um ângulo de 45°.

Passos:

1. Tomar um ângulo reto $A\hat{B}C$ e determinar sua bissetriz conforme 2.2. Cada um dos ângulos construídos mede 45°.

A Figura 2.6 ilustra os passos da construção.

Figura 2.6: Construção 2.6



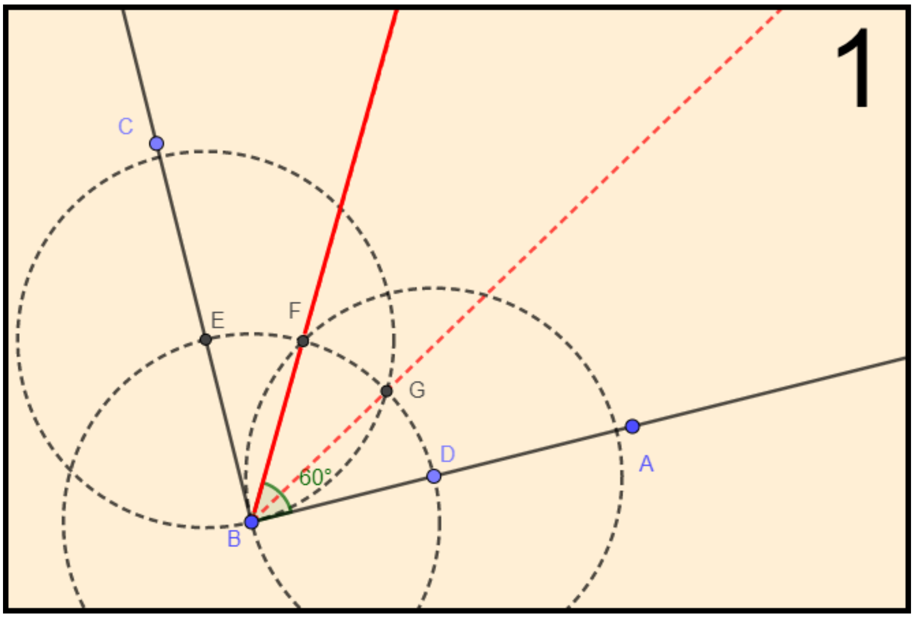
2.7 Construir um ângulo de $60°$.

Passos:

1. Tomar um ângulo reto $A\hat{B}C$, dividi-lo conforme 2.4. Considerar dois ângulos adjacentes para determinar um ângulo de $60°$.

A Figura 2.7 ilustra os passos da construção.

Figura 2.7: Construção 2.7



Observação: As construções 2.4, 2.5, 2.6 e 2.7 também podem ser construídas com o auxílio dos esquadros. O esquadro isósceles para a construção do ângulo de 45° e o escaleno para a construção dos ângulos de 30°e 60° sendo que o menor ângulo se opõe ao menor lado.

2.8 Dados uma reta r e dois pontos A e B no mesmo semiplano determinado por r, traçar segmentos que formam ângulos congruentes em relação a r.

Passos:

1. Considerar a reta r e os pontos A e B em um mesmo semiplano determinado por r. Traçar uma reta s passando por A e perpendicular a r, interceptando-a no ponto E;

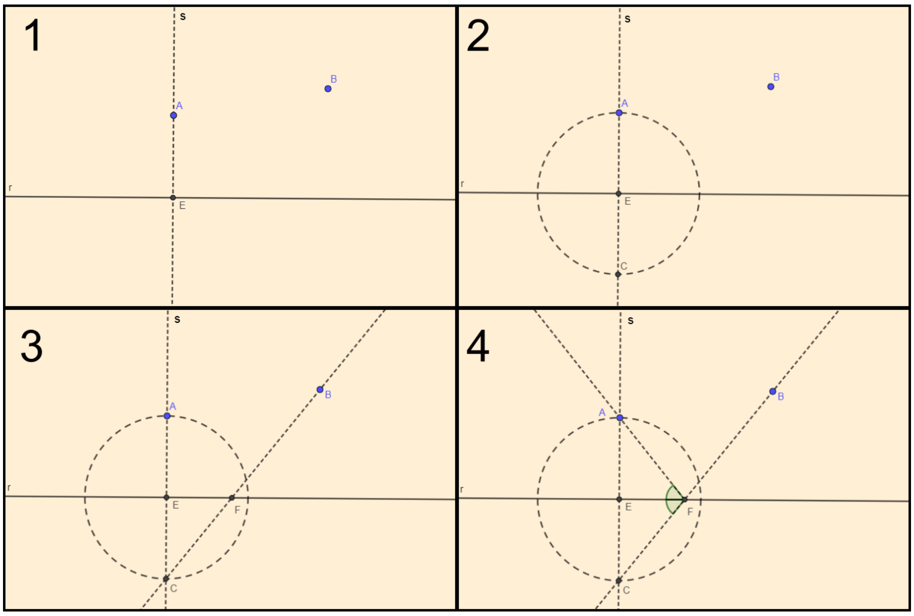
2. Marcar um ponto C sobre s tal que as medidas dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$ sejam iguais;

3. Traçar a reta $\overleftrightarrow{CB}$ que intercepta a reta r em um ponto F;

4. Traçar a semirreta $\overrightarrow{FA}$. Assim, $A\hat{F}E$ e $C\hat{F}E$ são os ângulos congruentes procurados.

A Figura 2.8 ilustra os passos da construção.

Figura 2.8: Construção 2.8



2.9 Dados um ângulo cujo vértice é inacessível e um ponto O, traçar uma reta que passe por O e pelo vértice.

Passos:

1. Considerar $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, segmentos contidos nas semirretas que definem o ângulo em questão, e O um ponto no interior do mesmo;

2. Traçar, a partir do ponto O, um segmento que interseccione a semirreta $\overrightarrow{AB}$ em um ponto F e outro segmento que interseccione a semirreta $\overrightarrow{CD}$ em um ponto E;

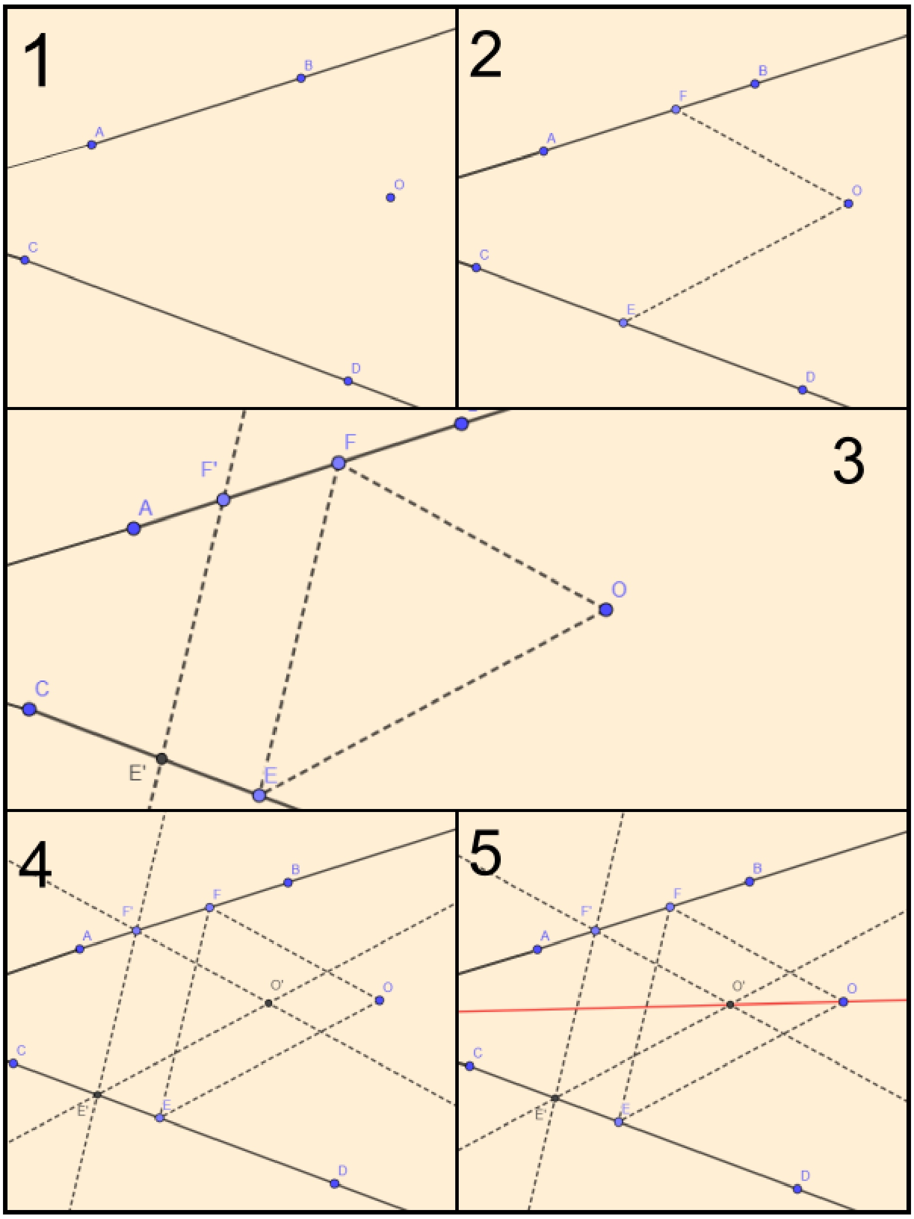
3. Traçar o segmento $\overline{FE}$. Considerar F' e E' outros pontos pertencentes às semirretas que contêm os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, tais que $\overleftrightarrow{F'E'}$ e $\overline{FE}$ sejam paralelos;

4. Traçar uma reta, passando por F', paralela a $\overline{OF}$ e outra, passando por E', paralela a $\overline{OE}$. Determinar O' a intersecção de tais retas;

5. A reta determinada por O e O' é a reta procurada.

A Figura 2.9 ilustra os passos da construção.

Figura 2.9: Construção 2.9



2.10 Descrever um arco capaz de um ângulo α sobre uma reta dada r.

Passos:

1. Considerar o segmento $\overline{BA}$ sobre r e a semirreta $\overrightarrow{BC}$, com C não pertencendo a r, de modo que o ângulo $A\hat{B}C$ tenha medida α;

2. Traçar a reta s perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ passando por B;

3. Determinar a mediatriz t do segmento $\overline{BA}$;

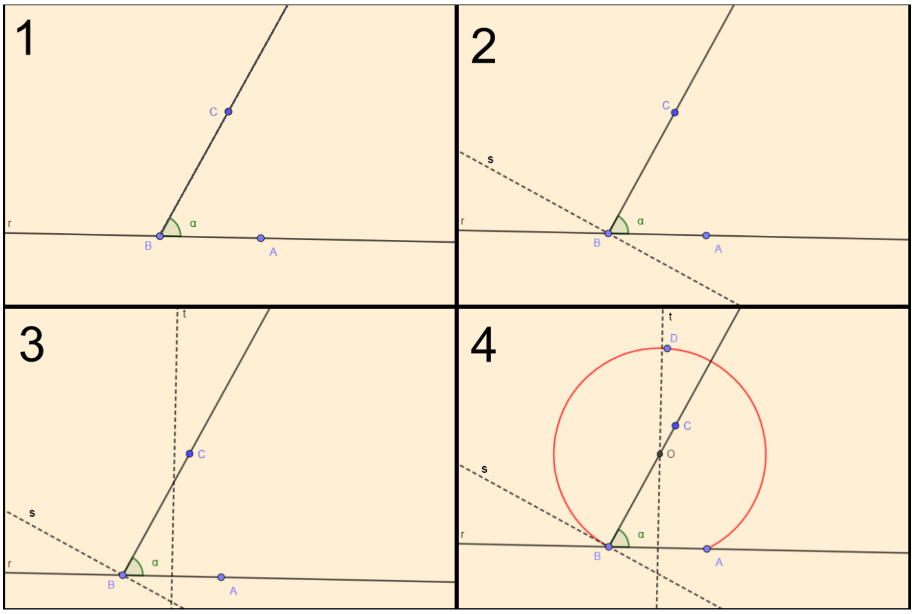
4. Marcar O, intersecção de $\overrightarrow{BC}$ e t, que descreve o centro do arco capaz[1], cujo raio tem

[1] Arco constituído por todos os pontos D do plano tais que o ângulo $B\hat{D}A$ é sempre igual a α.

medida equivalente a $\overline{OB}$.

A Figura 2.10 ilustra os passos da construção.

Figura 2.10: Construção 2.10



Capítulo 3

Linhas Curvas

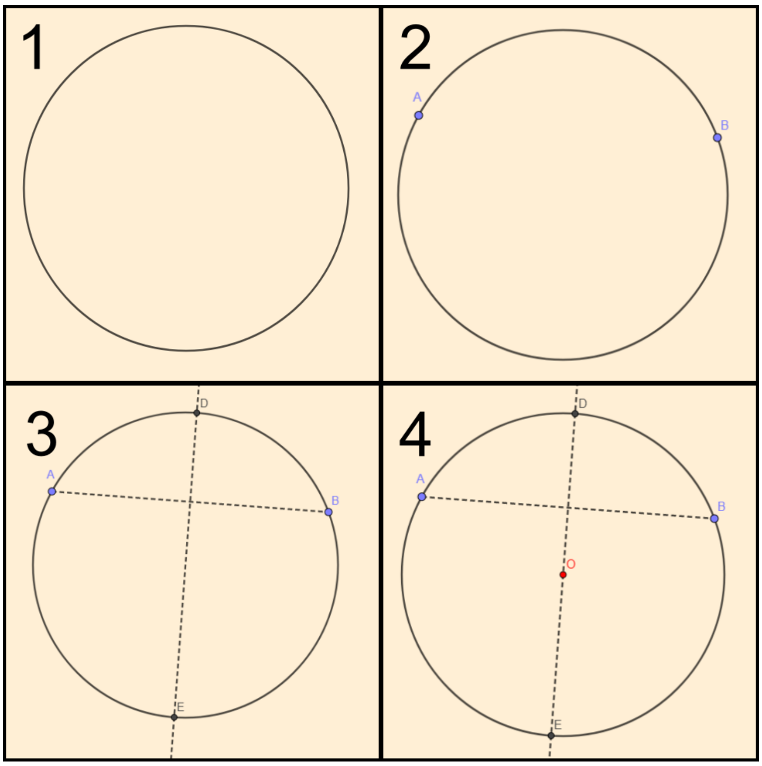
3.1 Determinar o centro de uma circunferência.

Passos:

1. Considerar uma circunferência qualquer;
2. Marcar dois pontos A e B sobre a circunferência;
3. Traçar a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Marcar D e E os pontos de intersecção dessa reta com a circunferência;
4. Marcar O, ponto médio de $\overline{DE}$. Esse determina o centro procurado.

A Figura 3.1 ilustra os passos da construção.

Figura 3.1: Construção 3.1



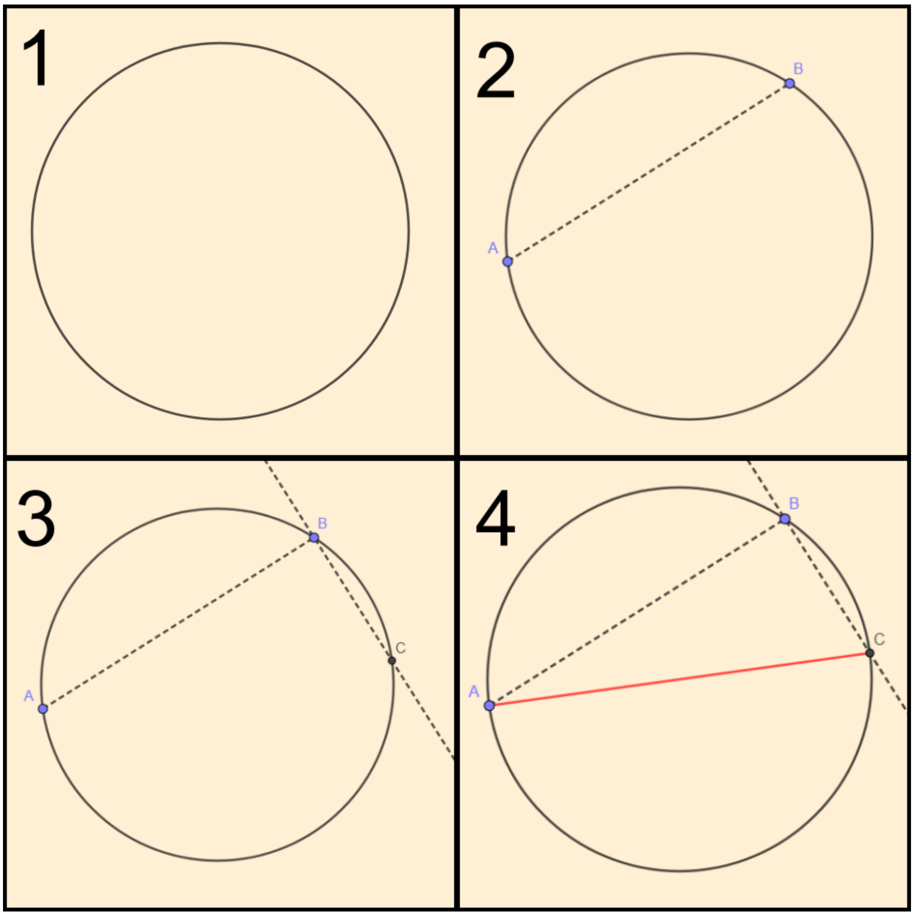
3.2 Traçar o diâmetro de uma circunferência cujo centro é desconhecido.

Passos:

1. Considerar uma circunferência de centro desconhecido;
2. Traçar uma corda qualquer $\overline{AB}$;
3. Traçar por B uma reta perpendicular a $\overline{AB}$ e marcar C ponto de intersecção desta reta com a circunferência;
4. Traçar o segmento $\overline{AC}$. Esse é o diâmetro procurado.

A Figura 3.2 ilustra os passos da construção.

Figura 3.2: Construção 3.2



3.3 Dados dois pontos e um raio, traçar uma circunferência passando por estes pontos.

Passos:

1. Considerar os pontos A e B e o segmento $\overline{EF}$, cuja medida é igual ao raio dado;

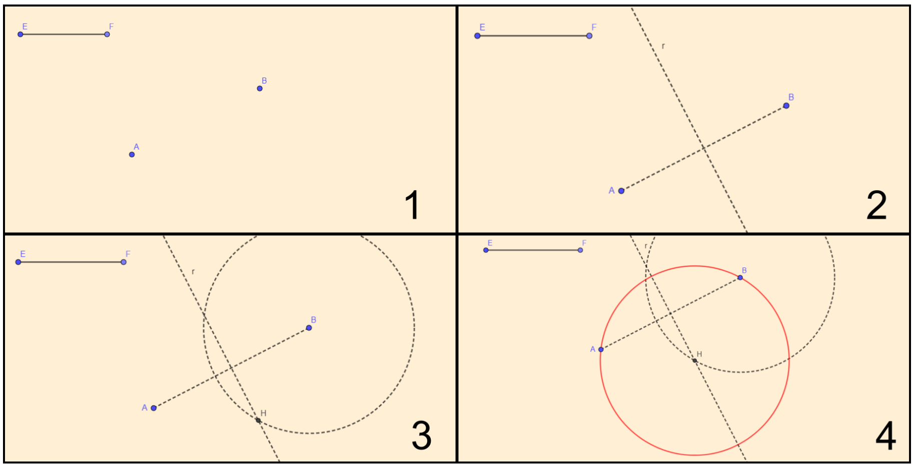
2. Traçar o segmento $\overline{AB}$ e sua mediatriz r;

3. Traçar uma circunferência com centro em B e raio $\overline{EF}$. Marcar o ponto H, intersecção dessa circunferência com a reta r;

4. Traçar a circunferência com centro em H e raio $\overline{BH}$. Essa é a circunferência procurada.

A Figura 3.3 ilustra os passos da construção.

Figura 3.3: Construção 3.3



3.4 Traçar uma circunferência por três pontos A, B e C, não colineares.

Passos:

1. Considerar os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$;

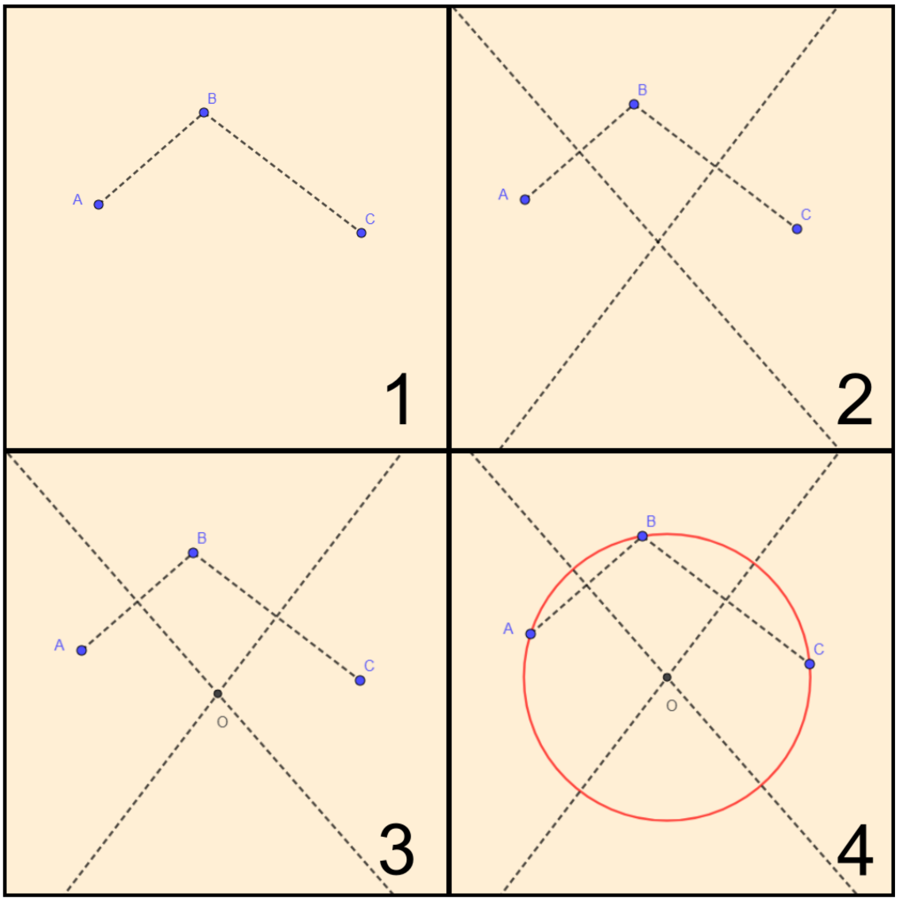
2. Traçar as mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$;

3. Marcar O, a intersecção das mediatrizes;

4. Traçar, com centro em O e raio $\overline{OA}$, a circunferência procurada.

A Figura 3.4 ilustra os passos da construção.

Figura 3.4: Construção 3.4



3.5 Dividir um arco em duas partes congruentes.

Passos:

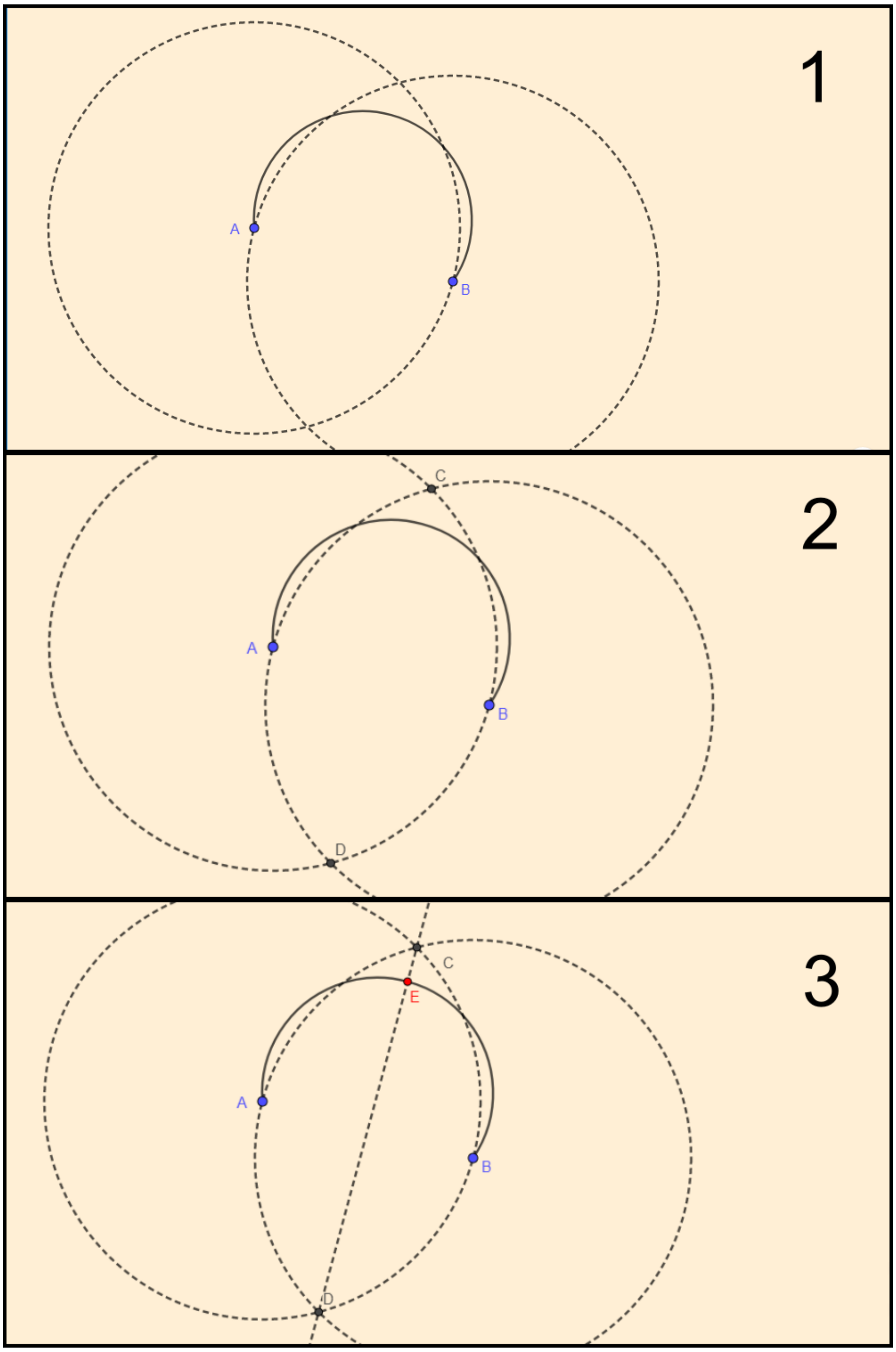
1. Considerar um arco $\overset{\frown}{AB}$, traçar uma circunferência centrada em A e raio maior que a metade do segmento $\overline{AB}$. Com mesmo raio, traçar uma circunferência centrada em B;

2. Marcar C e D pontos de intersecção das circunferências determinadas no item anterior;

3. Marcar o ponto E, intersecção da reta $\overleftrightarrow{CD}$ com o arco $\overset{\frown}{AB}$. Esse ponto divide o arco em duas partes congruentes.

A Figura 3.5 ilustra os passos da construção.

Figura 3.5: Construção 3.5



3.6 Retificar uma circunferência.

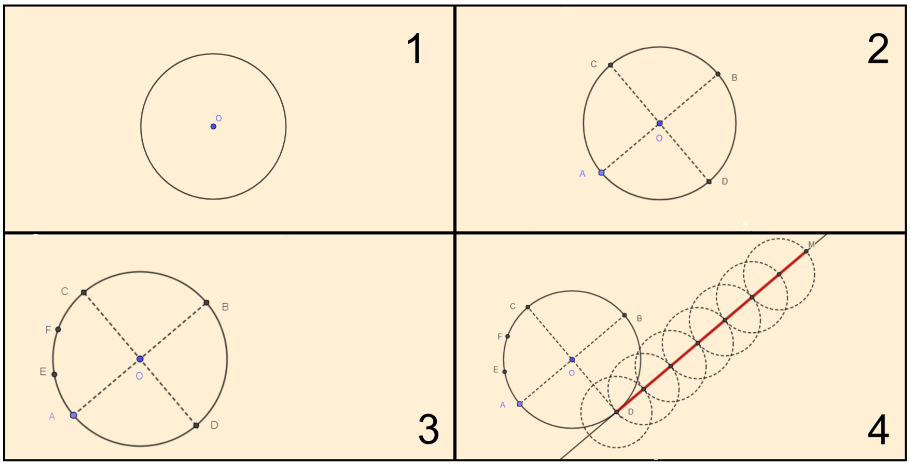
Passos:

1. Considerar uma circunferência de centro O;
2. Traçar dois diâmetros perpendiculares, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$;
3. Dividir o arco $\overset{\frown}{AC}$ em três partes congruentes, a partir de A, tome o primeiro ponto da partição, sendo este E;

4. Transcrever o segmento, sobre uma reta, cuja medida é 7 vezes a medida de $\overline{AE}$. Tem-se assim a retificação[1] da circunferência dada. Observamos que, quanto maior o número de partição do arco $\overset{\frown}{AC}$, mais aproximada será a retificação da mesma, uma vez que este problema é insolúvel do ponto de vista da geometria descritiva.

A Figura 3.6 ilustra os passos da construção.

Figura 3.6: Construção 3.6



Observação: A retificação de uma circunferência é um processo aproximado, a construção aqui descrita é creditada a Arquimedes.

3.7 Retificar um arco menor que um quadrante.

Passos:

1. Considerar um arco $\overset{\frown}{AB}$ de centro O;

2. Traçar uma reta r passando por O e A. Marcar C sobre a reta r tal que $\overline{OC}$ tenha a mesma medida de $\overline{OA}$;

3. Dividir o segmento $\overline{OA}$ em quatro partes iguais;

4. Traçar o segmento $\overline{DC}$ sobre r ($D \notin \overline{CA}$) de modo que $\overline{DC}$ seja igual a $\frac{3}{4}$ de $\overline{OA}$;

5. Traçar a reta s passando por D e B;

6. Traçar uma reta t perpendicular à r passando por A;

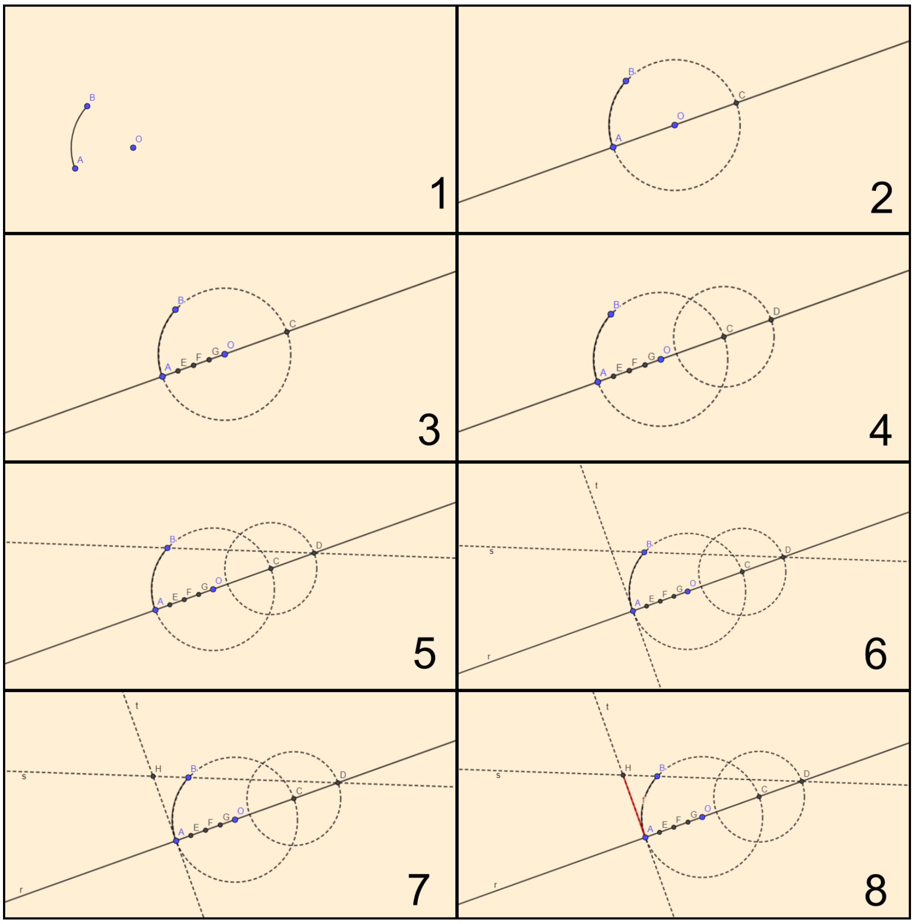
7. Marcar o ponto H igual a $s \cap t$;

8. O segmento $\overline{AH}$ é a retificação do arco desejado.

[1] Segmento de reta cuja medida é igual ao comprimento da circunferência.

A Figura 3.7 ilustra os passos da construção.

Figura 3.7: Construção 3.7



3.8 Dividir uma circunferência em $2,4,8,\ldots$ arcos congruentes.

Passos:

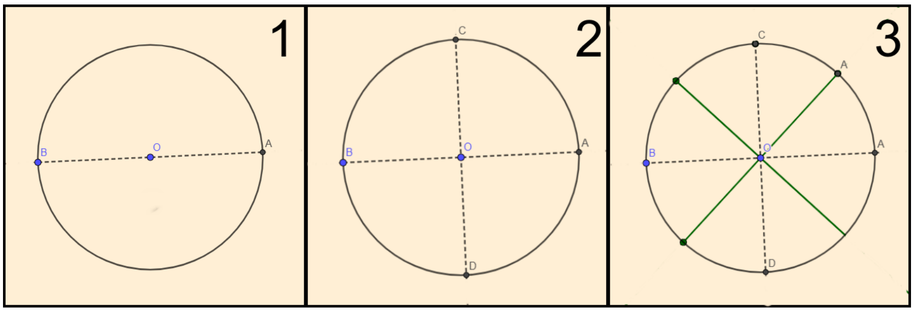
1. Considerar uma circunferência de centro O e traçar o diâmetro $\overline{AB}$. Esse a divide em duas partes congruentes;

2. Traçar o diâmetro $\overline{CD}$ perpendicular ao diâmetro $\overline{AB}$. Assim divide-se a circunferência em quatro partes congruentes;

3. Para dividir a circunferência em $8,16,\ldots$ partes congruentes, basta particionarmos indutivamentes os arcos obtidos em duas partes congruentes.

A Figura 3.8 ilustra os passos da construção.

Figura 3.8: Construção 3.8



3.9 Dividir uma circunferência em $3, 6, 12, \ldots$ arcos congruentes.

Passos:

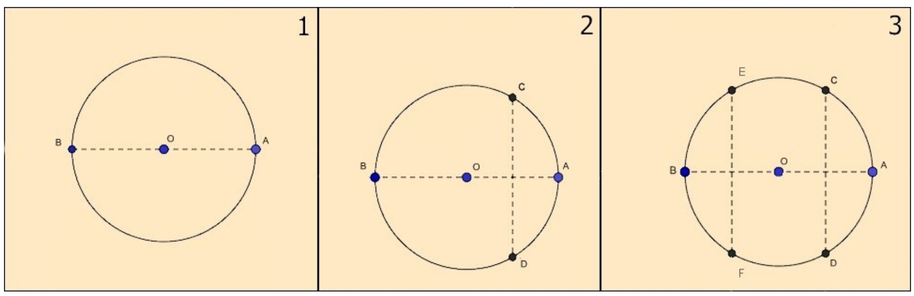
1. Considerar uma circunferência qualquer de centro O e traçar um diâmetro qualquer $\overline{AB}$;

2. Traçar a mediatriz de $\overline{OA}$ e marcar C e D pontos de intersecção da mediatriz com a circunferência. Os pontos B, C e D dividem a circunferência em três arcos congruentes;

3. Traçar a mediatriz de $\overline{OB}$ e marcar E e F pontos de intersecção da mediatriz com a circunferência. Assim divide-se a circunferência em seis partes congruentes. Para dividir em 12 e 24 arcos congruentes, utilizar a construção 3.8, assim serão divididos na metade todos os arcos obtidos no passo dois.

A Figura 3.9 ilustra os passos da construção.

Figura 3.9: Construção 3.9



3.10 Dividir uma circunferência em $9, 18, 36, \ldots$ arcos congruentes.

Passos:

1. Considerar uma circunferência centrada em O, considerar $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ diâmetros perpendiculares entre si;

2. Traçar uma circunferência com centro em B e raio $\overline{BO}$, onde E é a intersecção do arco $\overset{\frown}{CB}$ com a circunferência de centro B;

3. Traçar uma circunferência com centro em A e raio $\overline{AE}$, marcar F a intersecção da circunferência com o prolongamento do diâmetro $\overline{DC}$;

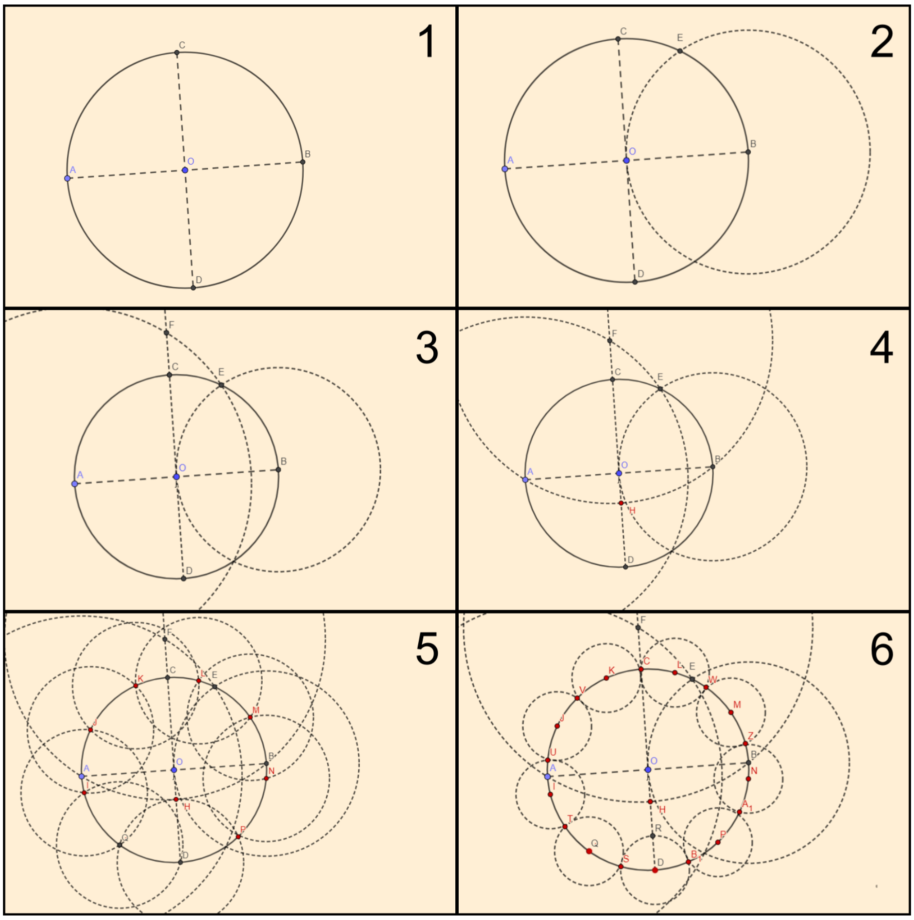
4. Traçar uma circunferência com centro em F e raio $\overline{FB}$, marcar H que é o ponto de intersecção com o diâmetro $\overline{CD}$;

5. RepetiR sucessivamente a medida do segmento $\overline{HD}$ sobre a circunferência, assim ela será dividida em 9 partes iguais;

6. Dividir o segmento $\overline{HD}$ ao meio. Assim, a circunferência será dividida em 18 partes iguais, e assim por diante.

A Figura 3.10 ilustra os passos da construção.

Figura 3.10: Construção 3.10



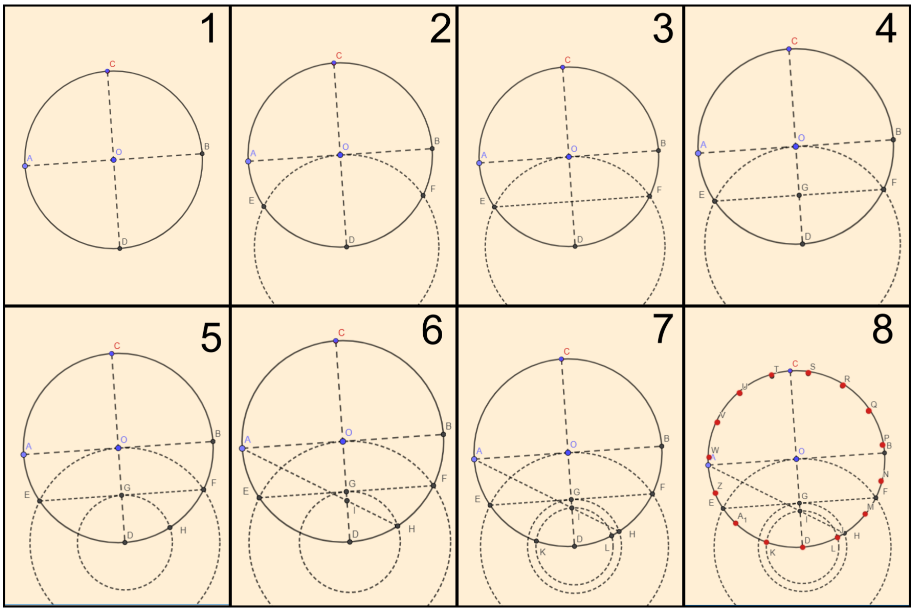
3.11 Dividir uma circunferência em $15, 30, 60, \ldots$ arcos congruentes.

Passos:

1. Considerar uma circunferência de centro O. Traçar os diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ perpendiculares entre si;
2. Traçar uma circunferência com centro em D e raio $\overline{DO}$, que intercepta a circunferência dada em E e F;
3. Traçar o segmento $\overline{EF}$;
4. Marcar o ponto G, intersecção do segmento $\overline{EF}$ com o diâmetro $\overline{CD}$;
5. Descrever o arco com centro em D e raio $\overline{DG}$ e entre os pontos D e F que intercepta a circunferência em um ponto H;
6. Traçar o segmento $\overline{HA}$ que intercepta o diâmetro $\overline{CD}$ em I;
7. Traçar uma circunferência com centro em D e raio $\overline{DI}$, que intercepta a circunferência dada em K e L;
8. Repetir sucessivamente a medida do segmento $\overline{DK}$ sobre a circunferência, assim ela será dividida em 15 partes iguais. Divida o segmento $\overline{DK}$ ao meio e tem-se a circunferência dividida em 30 partes iguais e assim por diante.

A Figura 3.11 ilustra os passos da construção.

Figura 3.11: Construção 3.11



Capítulo 4

Triângulos

4.1 Triângulo qualquer

Polígono que possui três lados.

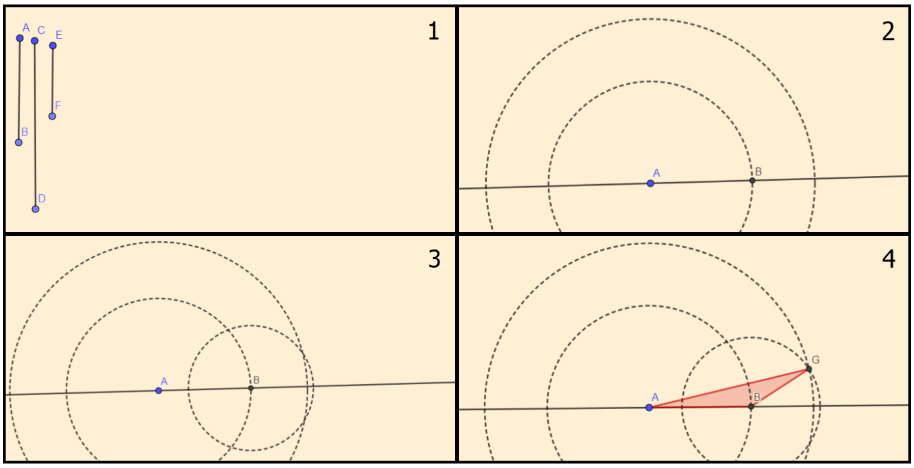
4.1.1 Construir um triângulo sendo dado os três lados.

Passos:

1. Considerar três segmentos de medidas quaisquer $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$;
2. Traçar uma circunferência de centro em A e raio com mesma medida do segmento $\overline{AB}$. Traçar uma circunferência de centro em A e raio com mesma medida do segmento $\overline{CD}$;
3. Traçar uma circunferência de centro em B e raio com mesma medida do segmento $\overline{EF}$;
4. Determinar o ponto G, sendo a intersecção das circunferências de raio $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ construídas. O triângulo procurado é formado pelos pontos A, B e G.

A Figura 4.1 ilustra os passos da construção.

Figura 4.1: Construção 4.1



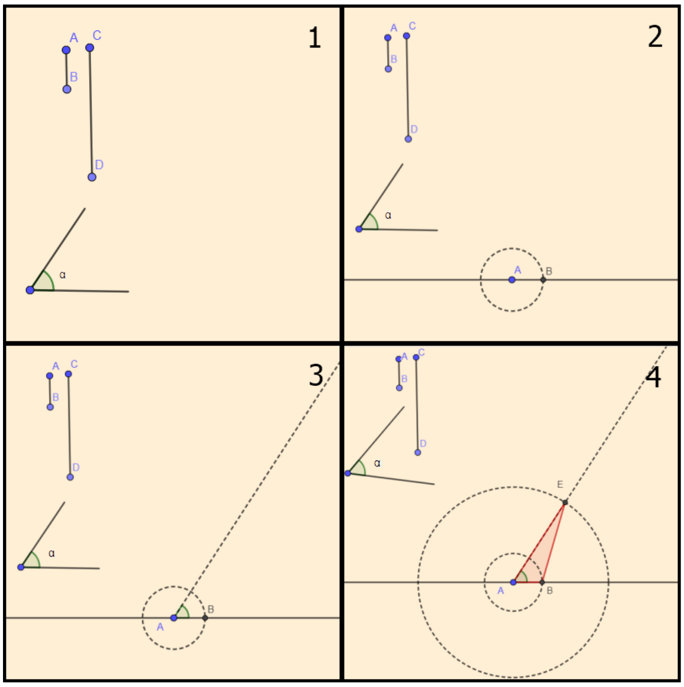
4.1.2 Construir um triângulo dado dois lados e o ângulo formado por eles.

Passos:

1. Considerar $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ os segmentos e α o ângulo formado entre eles;
2. Transportar o segmento $\overline{AB}$ para uma reta r qualquer;
3. Transportar o ângulo α para o ponto A;
4. Com raio de mesma medida do segmento $\overline{CD}$ e centro em A, marque o ponto E sobre o lado do ângulo α diferente do lado AB. O triângulo desejado é formado pelos pontos A, B e E.

A Figura 4.2 ilustra os passos da construção.

Figura 4.2: Construção 4.2



4.1.3 Dados dois lados de medida $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e uma altura de medida $\overline{MN}$, construir um triângulo.

Passos:

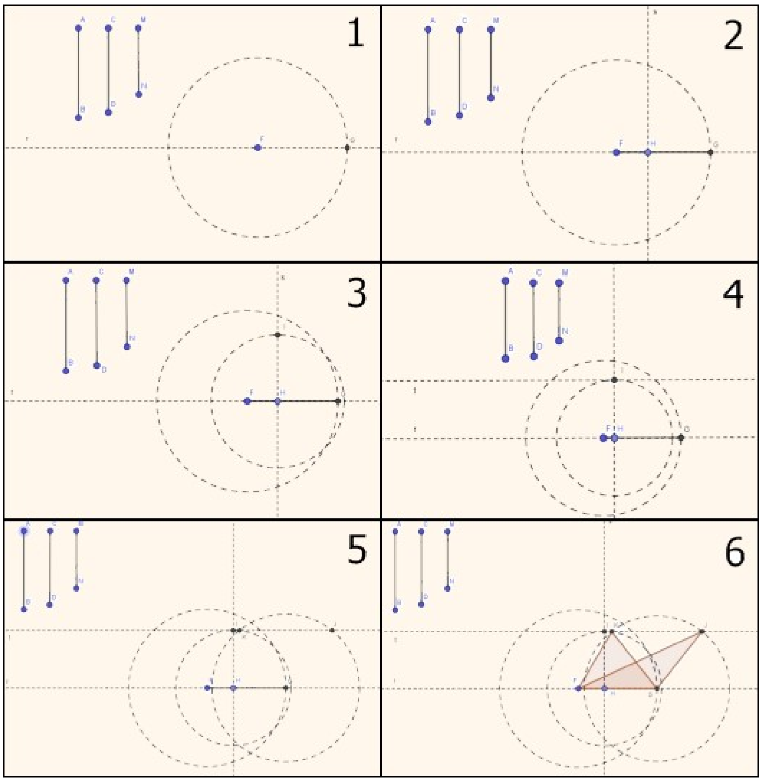
1. Considerar o segmento $\overline{FG}$, de mesma medida que o segmento $\overline{AB}$, sobre uma reta r qualquer;
2. Marcar um ponto H qualquer sobre o segmento $\overline{FG}$ e traçar uma reta s perpendicular a r passando por H;
3. Marcar um ponto I sobre s, tal que a medida de $\overline{HI}$ seja igual a medida de $\overline{MN}$;
4. Traçar uma reta t passando pelo ponto I, sendo paralela a reta r;

5. Traçar uma circunferência com centro em G e raio de mesma medida do segmento $\overline{CD}$ e que intercepta t nos pontos J e K;

6. Os triângulos FGJ e FGK resolvem o problema.

A Figura 4.3 ilustra os passos da construção.

Figura 4.3: Construção 4.3



Observação: Quando as medidas dos segmentos: $\overline{CD} < \overline{MN}$ o problema não terá solução. Se $\overline{CD} > \overline{MN}$ o problema terá duas soluções. Se $\overline{CD} = \overline{MN}$ o problema terá uma única solução.

4.1.4 Construir um triângulo conhecendo-se dois lados e uma mediana.

Passos:

1. Considerar dois segmentos de medidas quaisquer $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ que serão os lados do triângulo e o segmento $\overline{EF}$ de medida qualquer que será a mediana;

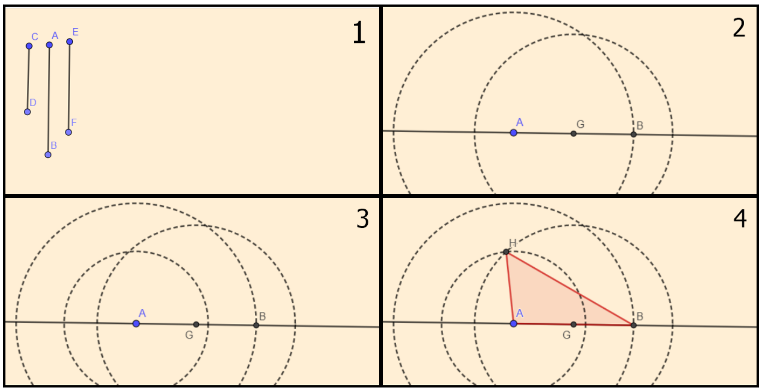
2. Determinar o ponto médio G do segmento $\overline{AB}$. Construir a circunferência de centro G e raio da mesma medida da mediana $\overline{EF}$;

3. Traçar a circunferência com centro em A e raio da mesma medida do segmento $\overline{CD}$;

4. Marcar o ponto H, que é a intersecção das duas circunferências. Unindo os pontos A, B e H têm-se o triângulo procurado.

A Figura 4.4 ilustra os passos da construção.

Figura 4.4: Construção 4.4



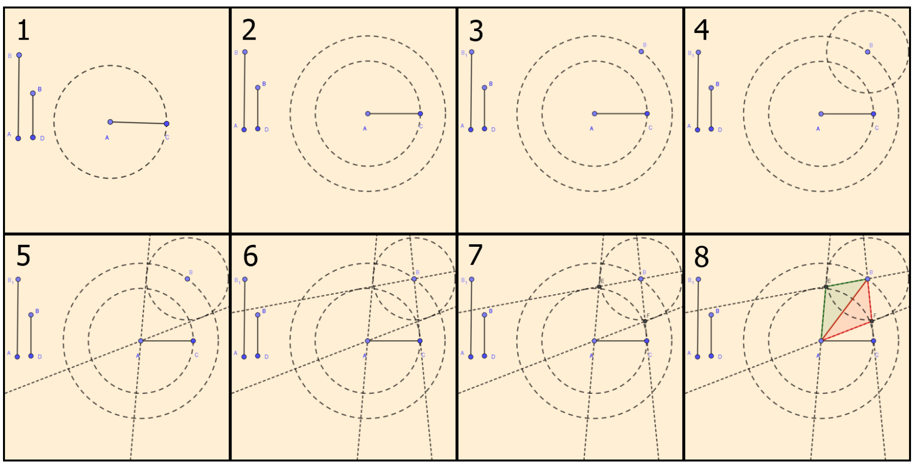
4.1.5 Construir um triângulo conhecendo-se um lado AB e duas alturas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

Passos:

1. Considere os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Traçar a circunferência de centro A e raio $\overline{AC}$;
2. Traçar uma circunferência de raio $\overline{AB}$, com centro em A;
3. Marcar um ponto B qualquer sobre essa circunferência;
4. Com centro em B e raio de mesma medida do segmento $\overline{BD}$, determinar outra circunferência;
5. Traçar, por A, retas tangentes a circunferência de centro B;
6. Traçar, por B, retas tangentes a circunferência de centro A e raio $\overline{AC}$;
7. Marcar os pontos E e F, intersecção das retas tangentes;
8. Os triângulos ABE e ABF resolvem o problema.

A Figura 4.5 ilustra os passos da construção.

Figura 4.5: construção 4.5



4.1.6 Construir um triângulo conhecendo-se os pés das alturas.

Passos:

1. Considerar os pontos A, B e C pés das alturas[1].

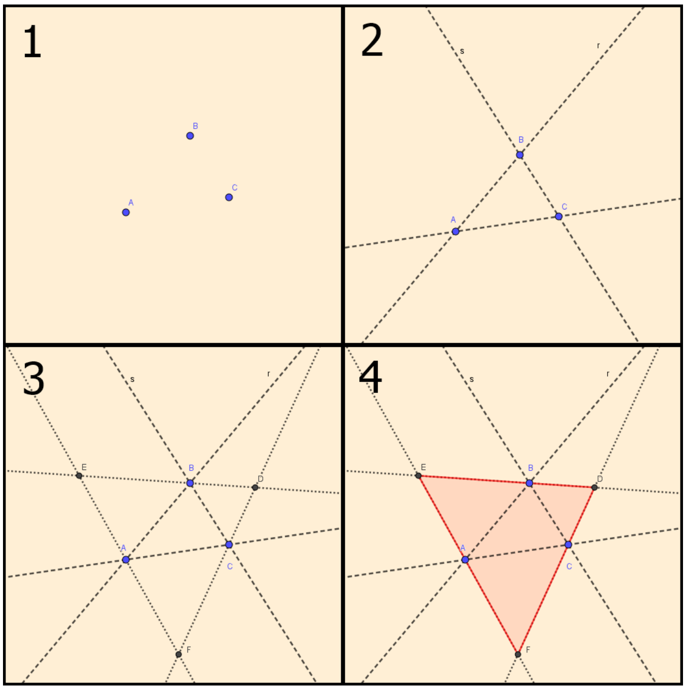
2. Traçar as retas r passando por A e B, s passando por B e C e t passando por A e C;

3. Traçar as bissetrizes dos ângulos externos do triângulo, que encontram-se nos pontos D, E e F;

4. Os pontos D, E e F definem o triângulo procurado.

A Figura 4.6 ilustra os passos da construção.

Figura 4.6: Construção 4.6



4.1.7 Construir um triângulo conhecendo-se as três medianas $\overline{MI}$, $\overline{NH}$ e $\overline{PG}$.

Passos:

1. Considerar $\overline{MI}$, $\overline{NH}$ e $\overline{PG}$ três medianas;

2. Construir um triângulo ABC cujos lados sejam iguais a medida de $\frac{2}{3}$ de cada mediana: $\overline{AB}$ igual a $\frac{2}{3}$ de $\overline{MI}$, $\overline{AC}$ igual a $\frac{2}{3}$ de $\overline{NH}$ e $\overline{BC}$ igual a $\frac{2}{3}$ de $\overline{PG}$. Para isso utilize as construções 1.9 e 4.1.1;

3. Determinar as retas $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ paralelas aos lados AC e AB, respectivamente, e traçar o triângulo CDB;

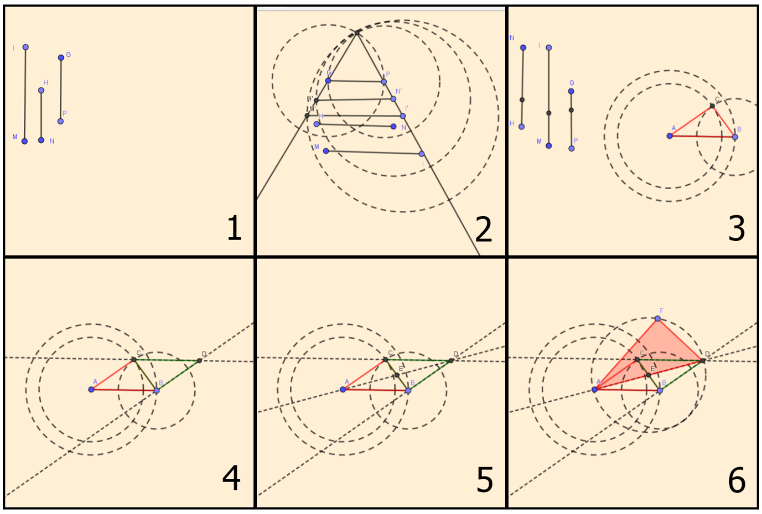
[1]Ponto onde a altura encontra a base.

4. Traçar a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e marcar o ponto E intersecção da reta $\overleftrightarrow{AD}$ com o segmento $\overline{BC}$;

5. Traçar com centro em E, uma circunferência de raio $\overline{PG}$ e marcar um ponto F qualquer sobre a circunferência, tal que F seja distinto de A e D. Ao unir os pontos A, D e F, se tem o triângulo procurado.

A Figura 4.7 ilustra os passos da construção.

Figura 4.7: Construçâo 4.7



4.1.8 Determinar o incentro de um triângulo.

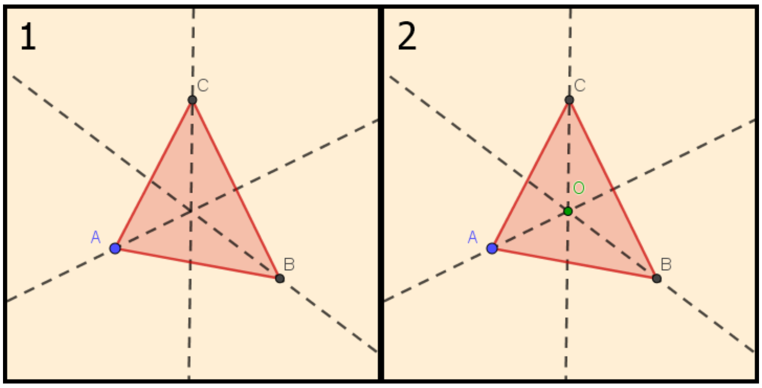
Passos:

1. Considerar um triângulo ABC. Traçar as bissetrizes de cada ângulo interno ao triângulo;

2. O encontro dessas bissetrizes O, é o incentro[2] procurado.

A Figura 4.8 ilustra os passos da construção.

Figura 4.8: Construção 4.8



[2]Ponto interno de um triângulo que equidista de seus lados.

4.1.9 Construir um triângulo dados dois lados e um ângulo.

Passos:

1. Considerar a e b, as respectivas medidas dos lados dados e α o ângulo;

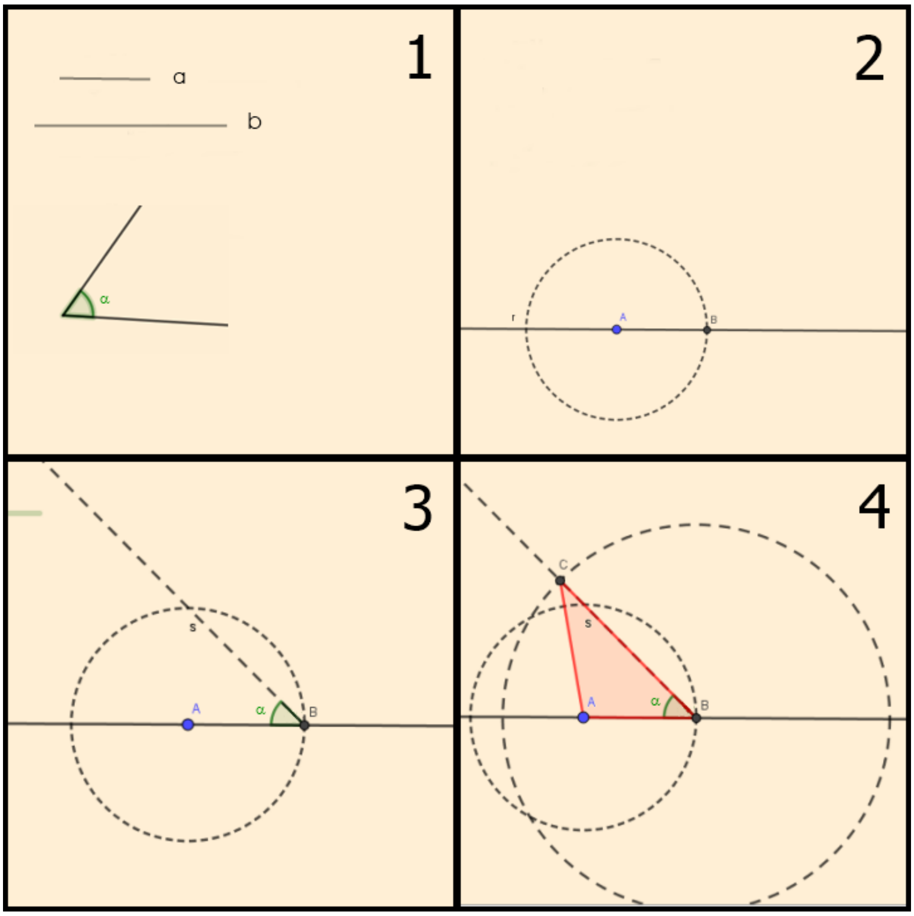
2. Traçar um segmento $\overline{AB}$ de medida a sobre uma reta r;

3. Transportar sobre $\overline{AB}$ um ângulo congruente à α, com centro em B, contido em um dos semiplanos determinados por r. Traçar a semirreta s determinada pelo ângulo construído, tal que s não seja a semirreta que está sobre r;

4. Traçar uma circunferência de raio b com centro em B e marcar C ponto de intersecção com s. Fica assim determinado o triângulo ABC nas condições descritas.

A Figura 4.9 ilustra os passos da construção.

Figura 4.9: Construção 4.9



4.1.10 Construir um triângulo dados um lado, uma altura relativa a ele e um ângulo.

Passos:

1. Considerar AB o lado, h a medida da altura e α o ângulo;

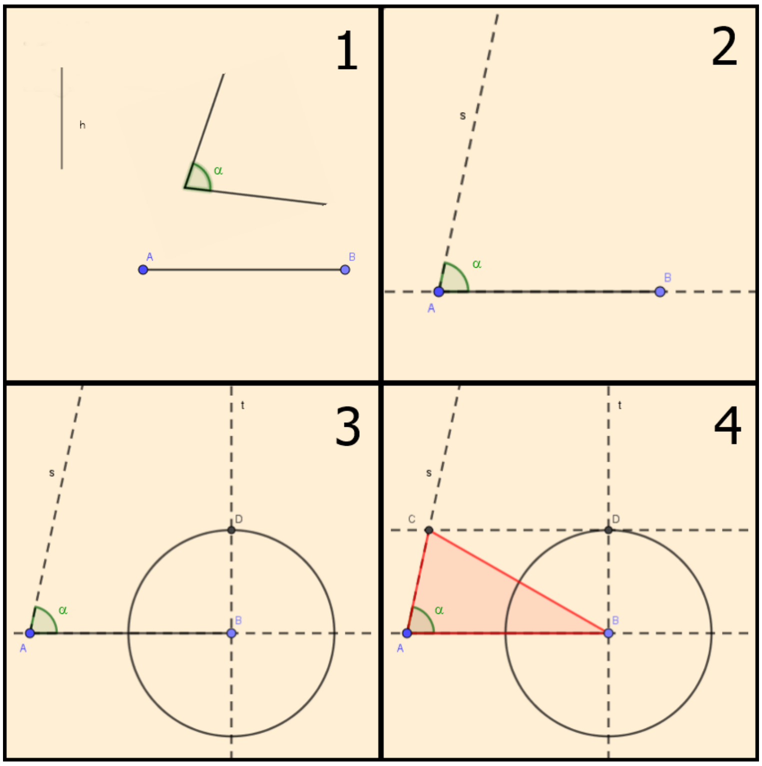
2. Traçar a reta r determinada por AB. Transportar o ângulo α para A, sendo s a semirreta que forma o ângulo α com r;

3. Traçar uma reta t perpendicular a r passando por B e marcar o ponto D nela, contido no mesmo semiplano que s, tal que BD seja igual a altura h;

4. Traçar uma reta paralela a reta r passando por D e marcar C sua intersecção com s. O triângulo determinado pelos ponto A, B e C é o procurado.

A Figura 4.10 ilustra os passos da construçâo.

Figura 4.10: Construção 4.10



4.1.11 Construir um triângulo dado um lado, um ângulo adjacente e a diferença dos outros dois lados.

Passos:

1. Considerar o segmento $\overline{AB}$ o lado dado, α o ângulo adjacente e d a diferença enunciada;

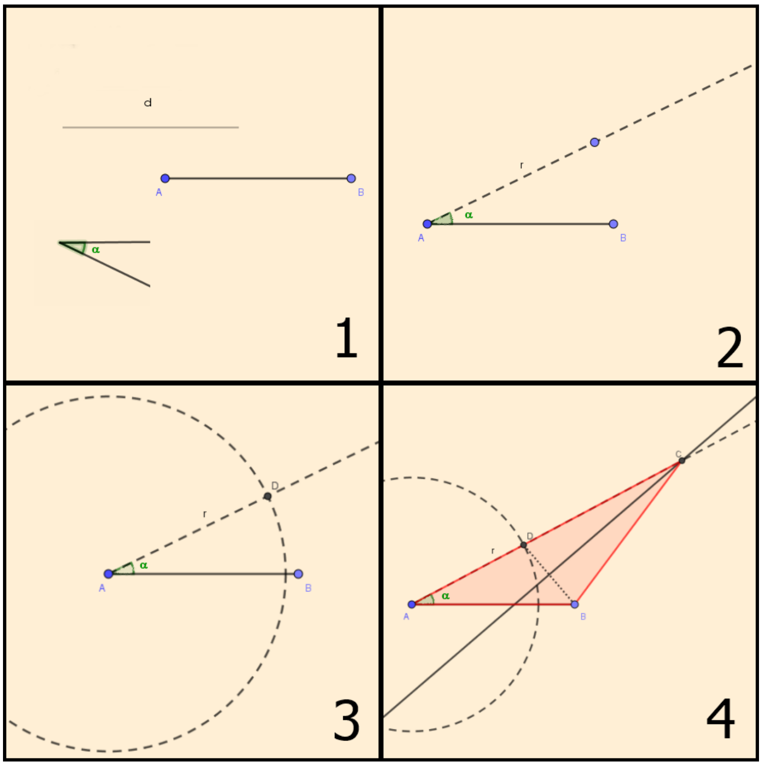
2. Transportar sobre o segmento $\overline{AB}$ um ângulo com vértice em A congruente a α. Traçar a semirreta r determinada pelo ângulo construído no item anterior, tal que r não seja a semirreta que passa pelo lado AB;

3. Determinar uma circunferência com centro em A e raio d e considerar o ponto D de intersecção com r;

4. Traçar a mediatriz do segmento $\overline{BD}$ e determinar a intersecção C desta reta com a semirreta r. O triângulo ABC definido pelos pontos A, B e C é o procurado.

A Figura 4.11 ilustra os passos da construção.

Figura 4.11: Construção 4.11



4.1.12 Construir um triângulo conhecendo-se um lado, um ângulo adjacente a ele e a soma dos outros dois lados.

Passos:

1. Considerar o lado AB, α o ângulo e s a soma dos dois outros lados;

2. Traçar a reta r determinada por $\overline{AB}$;

3. Transportar o ângulo α a partir de A;

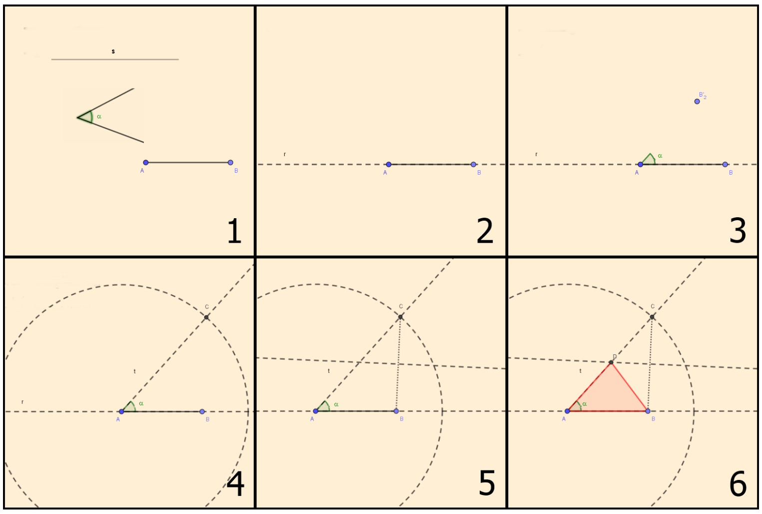
4. Na semirreta t que compõe o ângulo α e não contêm $\overline{AB}$, marcar C tal que $\overline{AC}$ seja igual a s;

5. Traçar a mediatriz de $\overline{BC}$ e marcar o ponto D a intersecção da mediatriz com t;

6. Os pontos A, D e B determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.12 ilustra os passos da construção.

Figura 4.12: Construção 4.12



4.1.13 Construir um triângulo dados um lado, o ângulo oposto a ele e a diferença dos outros dois lados.

Passos:

1. Considerar o lado AB, α o ângulo e d a diferença dos outros dois lados;

2. Construir um ângulo $C\hat{D}E$ reto sobre uma reta r qualquer;

3. Traçar um ângulo β (que não sobreponha $E\hat{D}C$) com vértice D sobre o lado CD, cuja medida é metade do ângulo α;

4. Marcar F na semirreta que compõe o ângulo β e não contêm o ponto C, tal que o segmento $\overline{DF}$ seja igual a d;

5. Marcar o ponto G, intersecção da cinrcunferência com centro em F e raio igual ao segmento $\overline{AB}$ com a reta r. Traçar o segmento $\overline{FG}$;

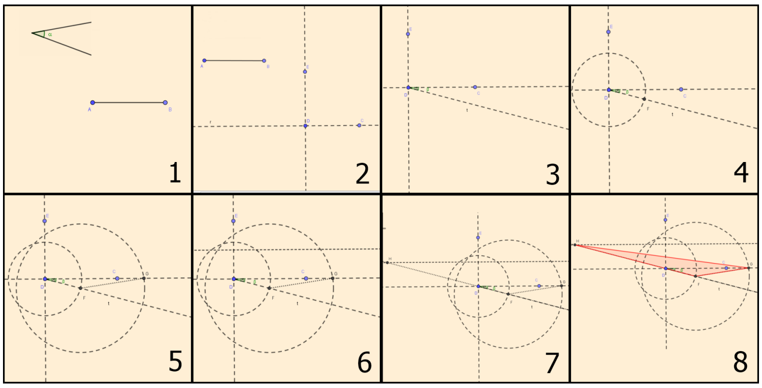
6. Determinar a mediatriz do segmento $\overline{DE}$;

7. Marcar o ponto H, intersecção da mediatriz com o prolongamento do segmento $\overline{FD}$;

8. Os pontos F, G e H determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.13 ilustra os passos da construção.

Figura 4.13: Construção 4.13



4.1.14 Construir um triângulo dados a medida de um lado, o ângulo oposto a ele e a soma dos outros dois lados.

Passos:

1. Considerar l a medida do lado dado, α o ângulo oposto a este lado e s a soma dos outros dois lados;

2. Marcar um ponto O sobre uma reta r e com vértice neste ponto transpor um ângulo congruente a metade do ângulo α sobre r;

3. Traçar a semirreta t com origem em O determinada pelo ângulo construído no item 2, tal que t não seja a semirreta que está sobre r;

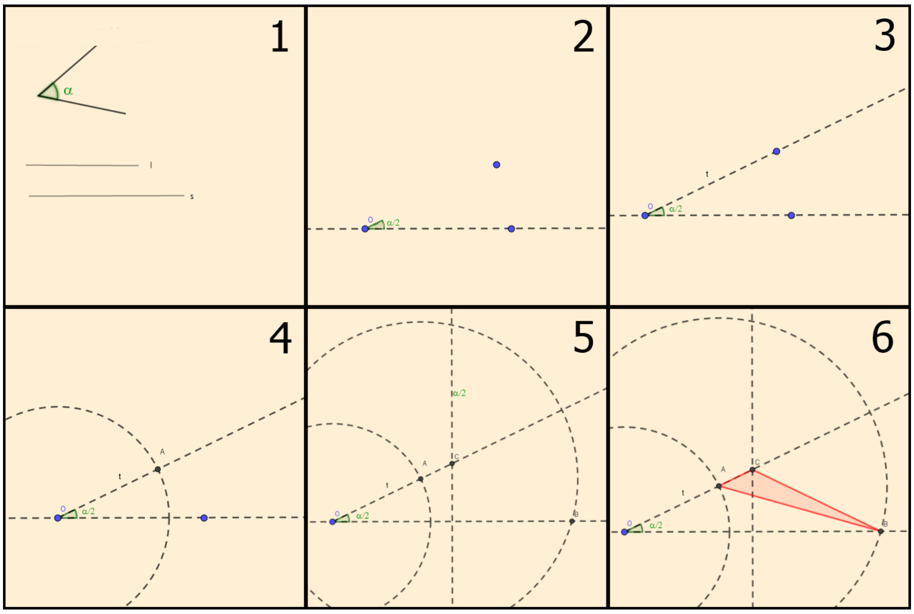
4. Traçar uma circunferência com centro em O e raio l e marcar o ponto A, intersecção dela com a semirreta t;

5. Traçar uma circunferência com centro em A e raio s e marcar o ponto B, intersecção dessa com a reta r. Traçar a mediatriz do segmento $\overline{OB}$ e marcar o C a intersecção com a semirreta t;

6. O triângulo determinado pelos pontos A, B, C é o procurado.

A Figura 4.14 ilustra os passos da construção.

Figura 4.14: Construção 4.14



4.1.15 Construir um triângulo sendo dados a base, a altura e o ângulo oposto à base dada.

Passos:

1. Considerar a a medida da base dada, h a medida da altura e α o ângulo;

2. Traçar uma reta r qualquer e marcar sobre ela o segmento $\overline{AB}$ de medida a;

3. Transportar o ângulo α para B, tendo assim o ângulo $A\hat{B}K$;

4. Marcar M, o ponto médio de $\overline{AB}$ e traçar por M uma reta s perpendicular ao segmento $\overline{AB}$;

5. Traçar uma reta t perpendicular ao segmento $\overline{BK}$ passando por B;

6. Marcar F ponto de intersecção das retas s e t. Traçar uma circunferência de centro M e raio h, marcando D a intersecção dessa com a reta s;

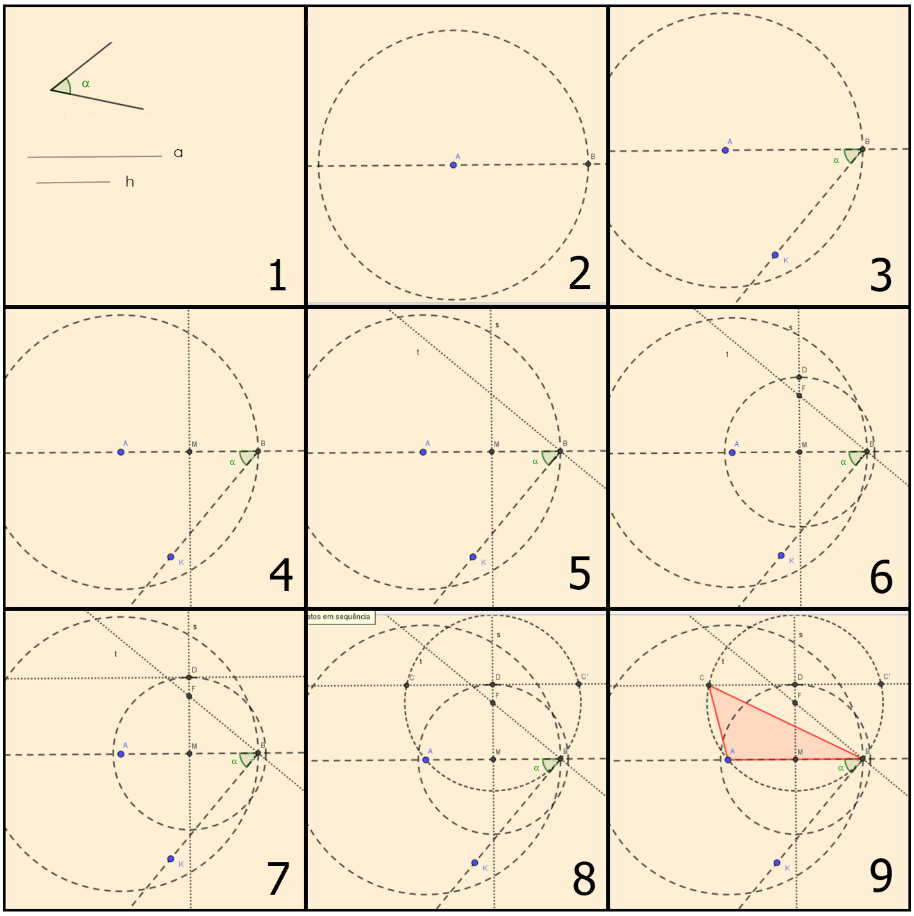
7. Traçar uma reta u paralela a reta r, passando por D;

8. Traçar uma circunferência com centro em F e raio $\overline{AF}$ e marcar C ponto de interseccção da circunferência com a reta u;

9. Os pontos A, B e C determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.15 ilustra os passos da construção.

Figura 4.15: Construção 4.15



Observação: O triângulo ABC' também satisfaz o problema.

4.1.16 Construir um triângulo conhecendo um ângulo $B\hat{A}C$ e dois segmentos de medidas $\overline{DE}$ e $\overline{FG}$ que correspondem as alturas.

Passos:

1. Considerar $\overline{DE}$ e $\overline{FG}$ os segmentos dados e α a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Sobre r, uma reta qualquer, transportar o ângulo dado $C\hat{A}B$, de modo que o segmento $\overline{AB}$ esteja sobre r e o segmento $\overline{AC}$ sobre s, onde s é a semirreta suporte do segmento $\overline{AC}$;

2. Traçar duas retas t e v, passando por A, perpendiculares à reta r e a semirreta s, respectivamente;

3. Traçar uma cirfunferência com centro em A e raio de medida qualquer, marcar o ponto N, intersecção desse com a reta t. Sobre v no mesmo semiplano de origem r, marcar H tal que a medida do segmento $\overline{AH}$ seja igual à medida do segmento $\overline{FG}$;

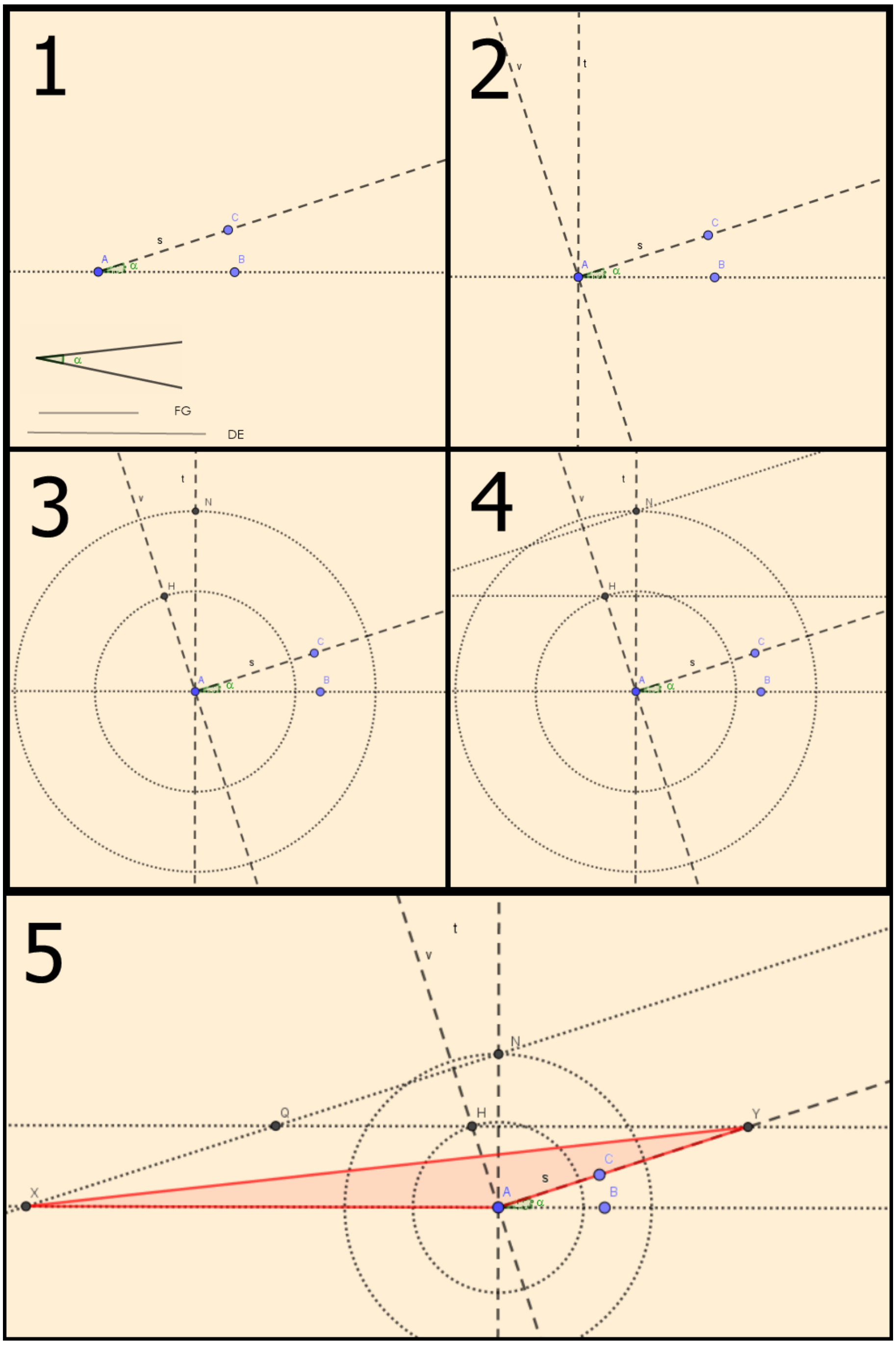
4. Traçar, por N, uma reta paralela ao segmento $\overline{AC}$ e por H uma outra reta paralela ao segmento $\overline{AB}$;

5. Marcar o ponto Q, intersecção das paralelas traçadas. Marcar os pontos X e Y, tal que X seja a intersecção das semirretas suportes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{NQ}$ e, Y seja a

intersecção da semirreta s com a reta suporte de $\overleftrightarrow{HQ}$. Os pontos A, X e Y determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.16 ilustra os passos da construção.

Figura 4.16: Construção 4.16



4.1.17 Construir um triângulo conhecendo-se os dois ângulos da base e sua altura relativa.

Passos:

1. Considerar α e β os ângulos dados e h a altura;

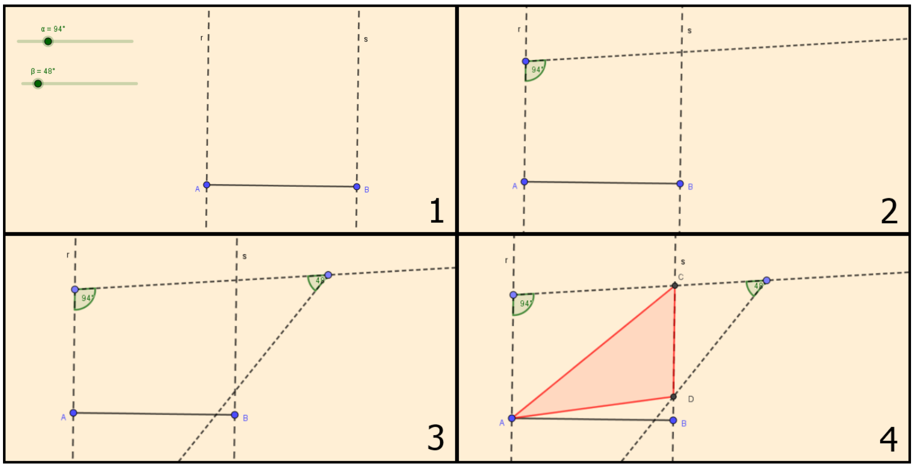
2. Traçar uma reta r e marcar um ponto H qualquer sobre ela. A partir de H, traçar um segmento $\overline{AH}$ perpendicular a reta r, de modo que o segmento $\overline{AH}$ tenha a mesma medida de h;

3. Marcar sobre r, dois pontos quaisquer D e E. Transportar os ângulos α e β para esses pontos, respectivamente, e traçar as semirretas s e t que os definem;

4. Traçar por A, retas paralelas a s e t. Marcar os pontos B e C, intersecções das paralelas com a reta r. Os pontos A, B e C definem o triângulo procurado.

A Figura 4.17 ilustra os passos da construção.

Figura 4.17: Construção 4.17



4.1.18 Construir um triângulo conhecendo o raio da circunferência que o circunscreve e os ângulos formados entre um dos vértices do triângulo e a reta tangente a ele.

Passos:

1. Considerar os ângulos α e β e um raio l;

2. Traçar uma circunferência de raio l, marcando o ponto A como seu centro e um ponto B qualquer sobre ela;

3. Traçar uma reta r tangente a circunferência passando por B;

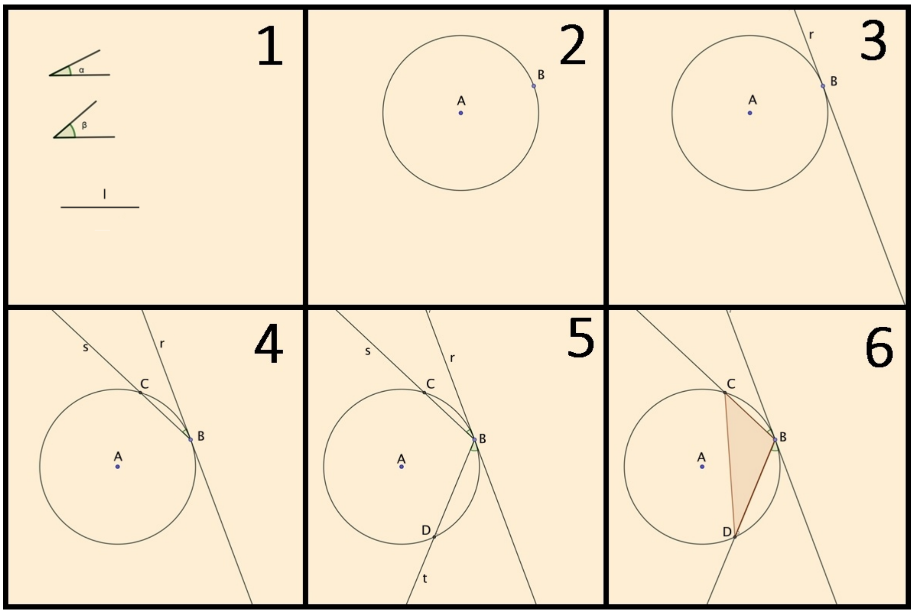
4. Transportar o ângulo α sobre a reta r com vértice em B de modo que o ângulo fique no mesmo semiplano da circunferência. Traçar a semirreta s, definida por α, e marcar o ponto C, intersecção dessa com a circunferência;

5. Transportar o ângulo β sobre a reta r com vértice em B de modo que o ângulo fique no mesmo semiplano da circunferência e que β não ocupe o mesmo espaço que α. Traçar a semirreta t, definida por β, e marcar o ponto D, intersecção dessa com a circunferência;

6. Os pontos B, C e D determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.18 ilustra os passos da construção.

Figura 4.18: Construção 4.18



4.1.19 Construir um triângulo dados dois ângulos adjacentes a um lado.

Passos:

1. Considerar o segmento $\overline{AB}$ como sendo o lado dado e α e β os ângulos adjacentes a esse lado;

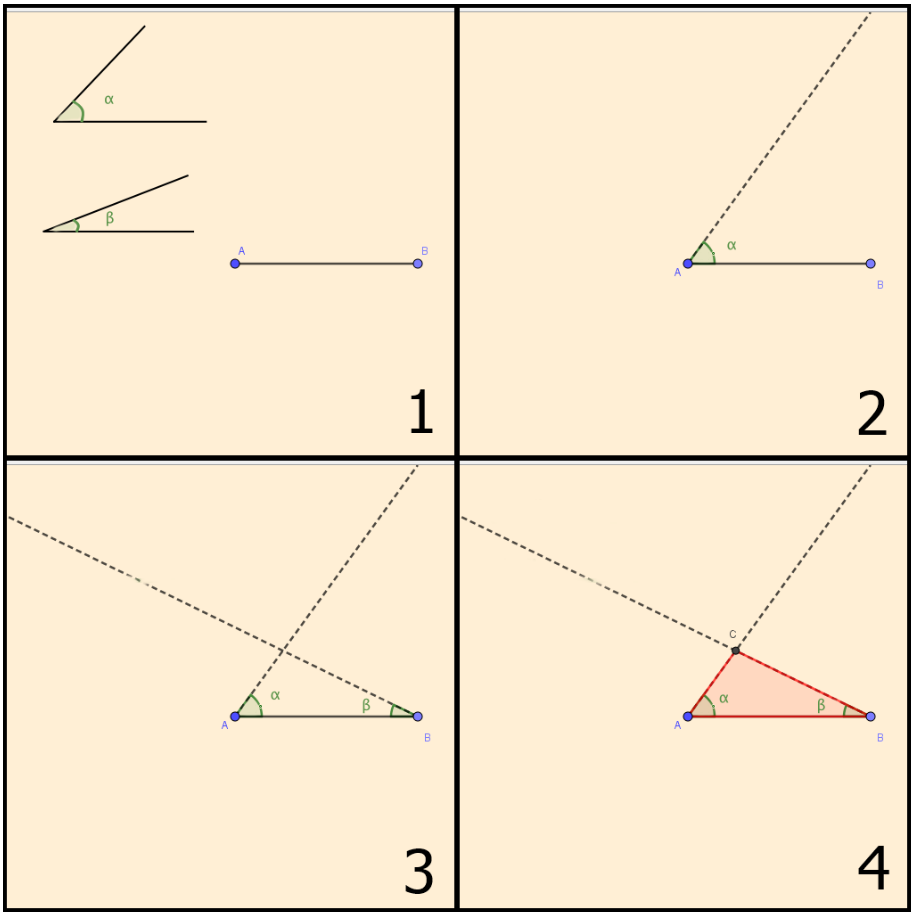
2. Traçar a semirreta r com origem em A determinada pelo ângulo α, tal que r não passe pelo segmento $\overline{AB}$;

3. Traçar a semirreta s com origem em B determinada pelo ângulo β, tal que s não passe por $\overline{AB}$;

4. Marcar o ponto C, intersecção de r e s. O triângulo definido pelos pontos A, B e C é o procurado.

A Figura 4.19 ilustra os passos da construção.

Figura 4.19: Construção 4.19



4.1.20 Construir um triângulo sendo dados dois ângulos e o lado oposto a um deles.

Passos:

1. Considerar os ângulos α, oposto ao lado dado, β, adjacente ao lado dado, e o lado de medida l. Traçar uma reta r e marcar dois pontos A e B quaisquer sobre ela;

2. Transportar o ângulo β para o ponto A formando o ângulo $B\hat{A}E$, sendo E um ponto sobre a semirreta que define o ângulo β com r;

3. Tomar um ponto F arbitrário na reta r e transportar o ângulo α para F tendo assim o ângulo $A\hat{F}G$;

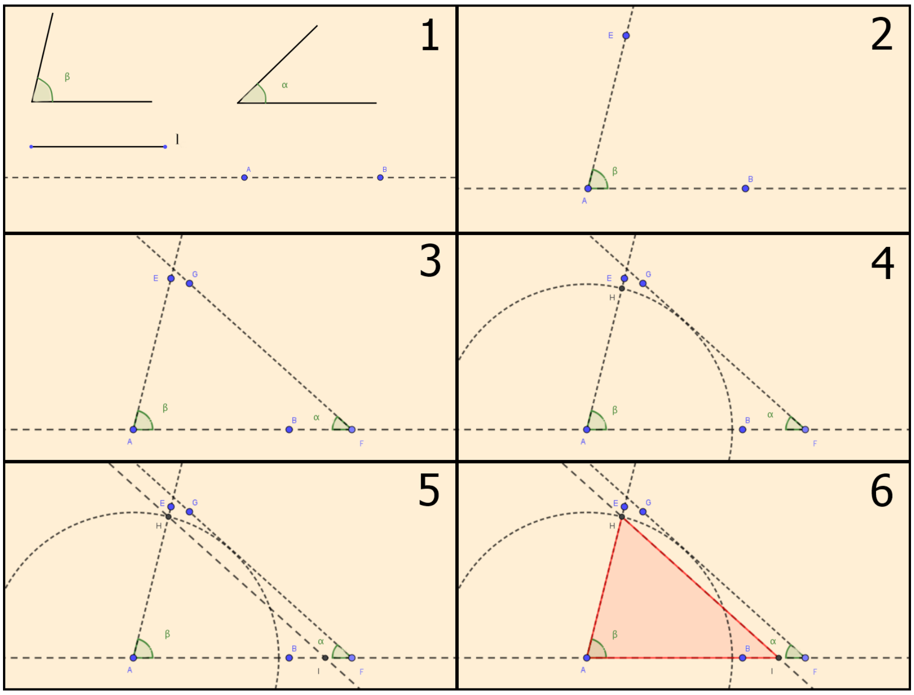
4. Traçar o segmento $\overline{AH}$ sobre o segmento $\overline{AE}$, de modo que tenha a mesma medida de a;

5. Traçar uma reta s paralela ao segmento $\overline{FG}$ passando por H e marcar I ponto de intersecção de r e s;

6. Os pontos A, H, I determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.20 ilustra os passos da construção.

Figura 4.20: Construção 4.20



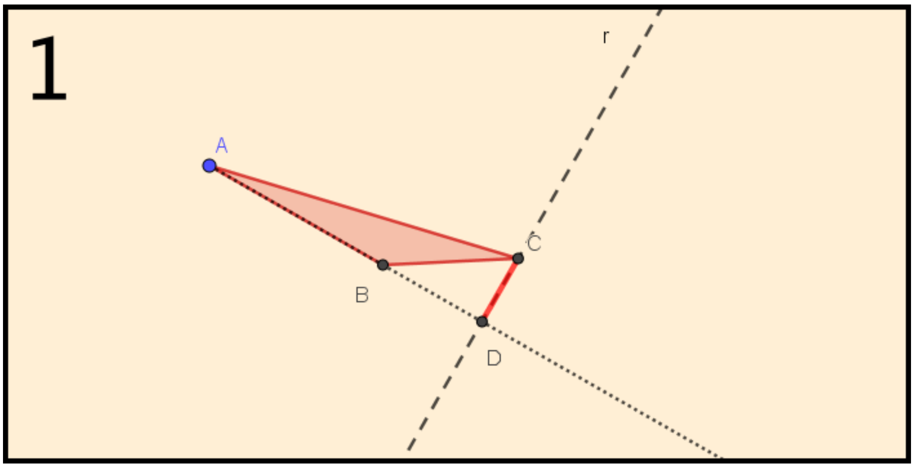
4.1.21 Traçar a altura de um triângulo qualquer ABC dado.

Passo:

1. Considerar o segmento $\overline{AB}$ como base, traçar por C uma reta r, perpendicular a base e marcar o ponto D, intersecção de r com o segmento $\overline{AB}$ ou seu prolongamento. O segmento $\overline{CD}$ é a altura relativa ao lado AB.

A Figura 4.20 ilustra os passos da construção.

Figura 4.21: Construção 4.21



4.2 Triângulos Equiláteros

Triângulo que possui três lados congruentes.

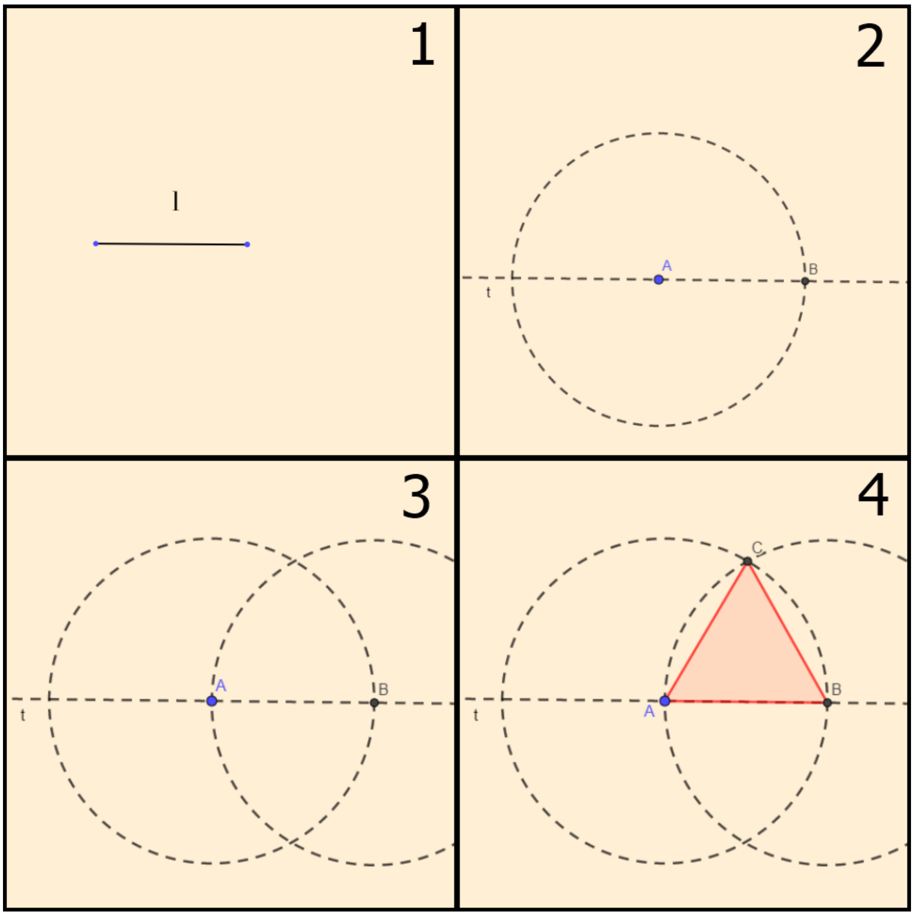
4.2.1 Construir um triângulo equilátero, sendo dada a medida de um lado.

Passos:

1. Considerar l a medida do lado;
2. Traçar uma reta t e marcar A e B sobre t, de modo que a medida do segmento $\overline{AB}$ seja igual a medida de l;
3. Traçar uma circunferência de raio l com centro em A e depois outra com centro em B;
4. Marcar o ponto C, intersecção das circunferências. Os pontos A, B e C determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.22 ilustra os passos da construção.

Figura 4.22: Construção 4.22



4.2.2 Construir um triângulo equilátero dada a altura.

Passos:

1. Considerar h a medida da altura dada;
2. Descrever uma circunferência c_1 de raio arbitrário com centro em um ponto A qualquer. Com mesmo raio, descrever uma circunferência c_2 centrada em um ponto O de c_1;

3. Marcar os pontos P e Q obtidos da intersecção de c_1 com c_2;

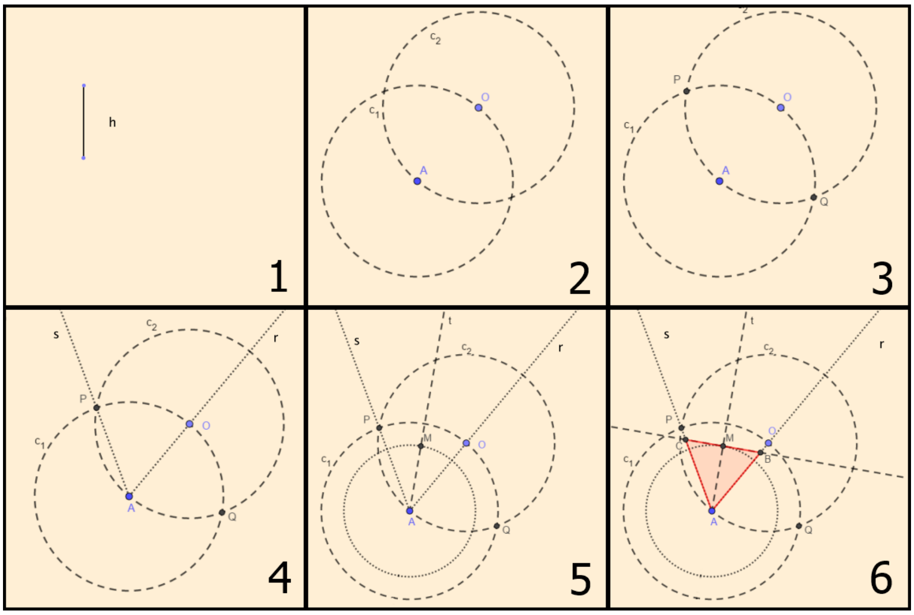
4. Determinar r e s as semirretas com origem em A e que passam por O e P, respectivamente;

5. Traçar t a bissetriz do ângulo $O\widehat{A}P$ e sobre t tomar um ponto M interior ao ângulo em questão, tal que a medida do segmento $\overline{AM}$ seja igual a medida de h;

6. Traçar uma reta u perpendicular a t passando por M e marcar as retas r e s, intersecções dessa reta com r e s, respectivamente. Os pontos A, B e C determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.23 ilustra os passos da construção.

Figura 4.23: Construção 4.23



4.3 Triângulo Isósceles

Triângulo que possui dois lados congruentes.

4.3.1 Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a altura e o ângulo do vértice relativo a essa altura.

Passos:

1. Considerar h a altura do triângulo e α o ângulo do vértice;

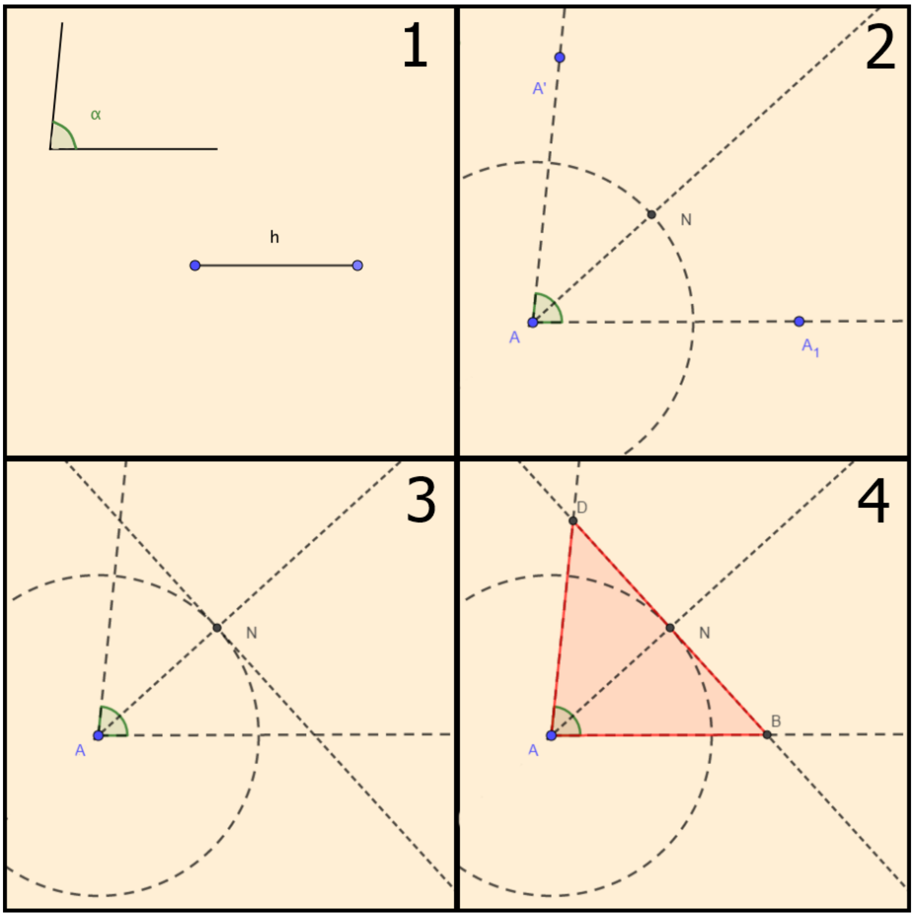
2. Transportar a partir de um ponto A qualquer, um ângulo congruente a α e traçar as semirretas com origem em A e determinadas por α. Depois, traçar a bissetriz do ângulo α e, sobre ela, marcar um ponto N de forma que a medida de segmento $\overline{AN}$ seja igual a medida de h;

3. Traçar a reta s, perpendicular à bissetriz, passando por N;

4. Marcar os pontos B e D, intersecções das semirretas que definem o ângulo α com a reta s. Os pontos A, B e D determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.24 ilustra os passos da construção.

Figura 4.24: Construção 4.24



4.3.2 Construir um triângulo isósceles dadas a base e a altura relativa a ela.

Passos:

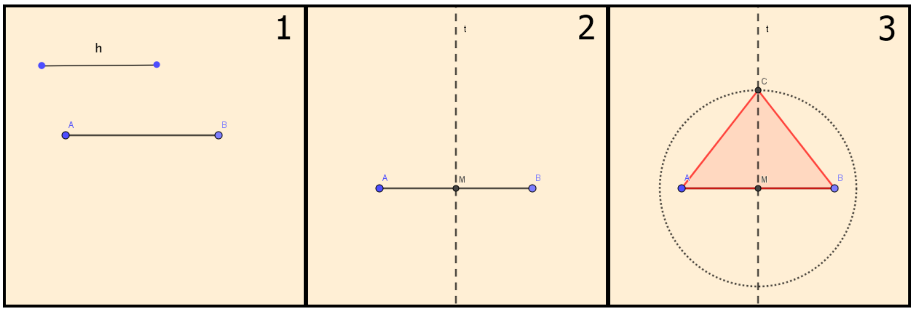
1. Considerar $\overline{AB}$ a base dada e h a medida da altura;

2. Marcar M, ponto médio de $\overline{AB}$ e por ele, traçar uma reta t perpendicular a $\overline{AB}$;

3. Considerar o ponto C, sobre a reta t, tal que a medida do segmento $\overline{MC}$ seja igual a medida de h. Os pontos A, B e C determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.25 ilustra os passos da construção.

Figura 4.25: Construção 4.25



4.3.3 Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a medida da base e do raio do círculo nele inscrito.

Passos:

1. Considerar b a medida da base e r_1 o raio de modo que a medida de r_1 seja menor que a metade da medida da base b. Traçar uma reta r e marcar A e B sobre r de modo que a medida do segmento $\overline{AB}$ seja igual a medida de b;

2. Marcar M ponto médio de $\overline{AB}$ e traçar por M a reta s perpendicular a r. Marcar N em s, de modo que a medida de $\overline{NM}$ seja igual a medida de r_1;

3. Traçar a circunferência c com centro em N e raio $\overline{NM}$;

4. Com centro em A e raio $\overline{AM}$ traçar uma circunferência que intercepta c em P;

5. Com centro em B e raio $\overline{AM}$ traçar uma circunferência que intercepta c em Q;

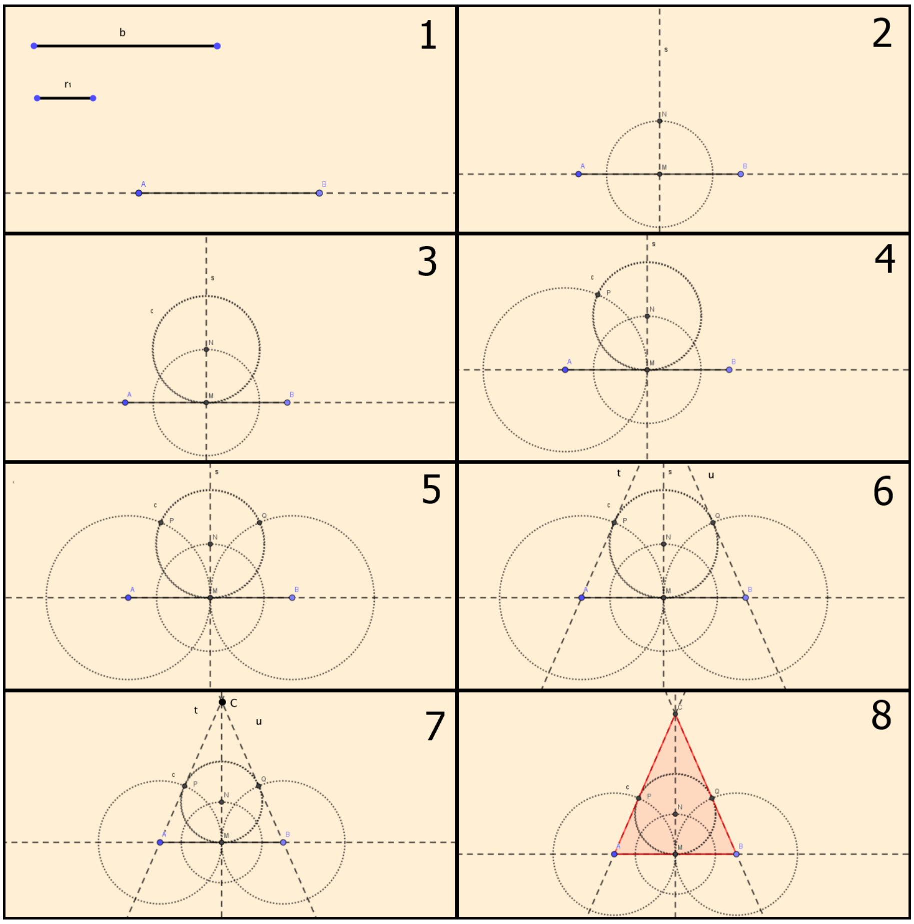
6. Traçar as retas, t passando por A e P e, u passando por B e Q;

7. Marcar C intersecção de t e u;

8. Os pontos A, B e C determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.26 ilustra os passos da construção.

Figura 4.26: Construção 4.26



4.3.4 Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a base e o raio do círculo circunscrito.

Passos:

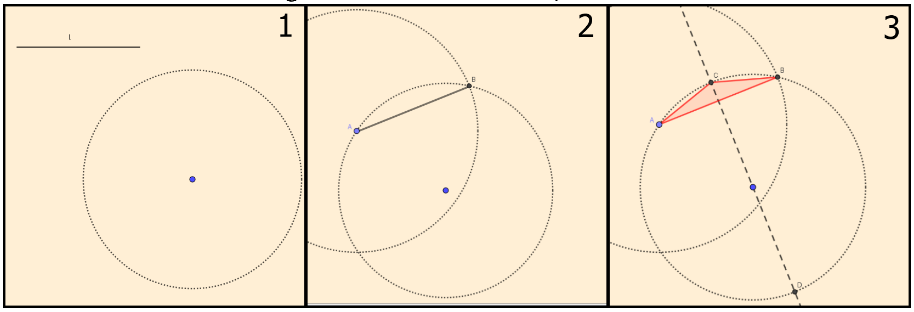
1. Considerar uma circunferência de raio r_1 e l a medida da base dada, de modo que l seja menor que o dobro der_1;

2. Traçar uma corda $\overline{AB}$ de medida l na circunferência;

3. Traçar a mediatriz de $\overline{AB}$ e em seguida, marcar C e D, intersecções da mediatriz com a circunferência. Os pontos A, B e C determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.27 ilustra os passos da construção.

Figura 4.27: Construção 4.27



4.3.5 Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a base e o ângulo oposto a ela.

Passos:

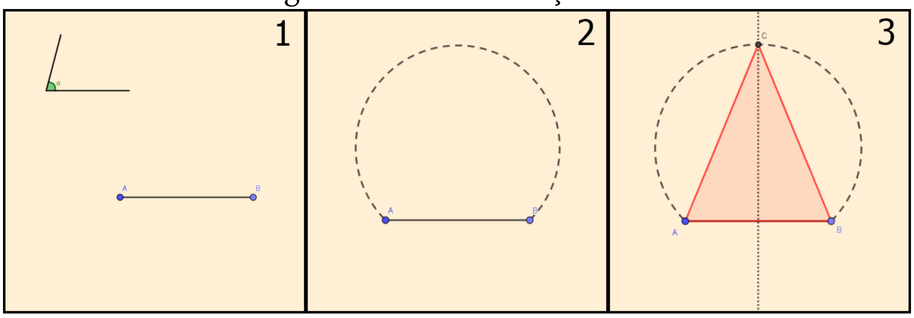
1. Considerar $\overline{AB}$ a base e α o ângulo;

2. Construir o arco capaz de α com relação ao segmento $\overline{AB}$;

3. Traçar a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ e marcar C o ponto de intersecção dela com o arco capaz já construído. Os pontos A, B e C determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.28 ilustra os passos da construção.

Figura 4.28: Construção 4.28



4.3.6 Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a altura e o ângulo oposto a base.

Passos:

1. Considerar h a medida da altura e r uma semirreta com origem em um ponto A. Considerar também α o ângulo dado;

2. Transportar sobre r o ângulo α com vértice em A;

3. Traçar a bissetriz do ângulo α e sobre ela, marcar um segmento $\overline{AN}$ de medida h;

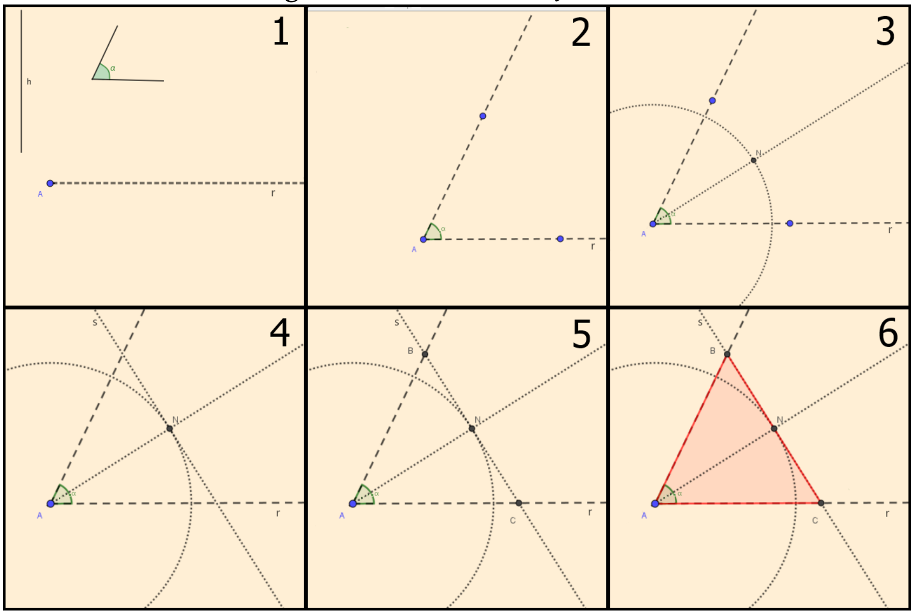
4. Traçar por N uma reta s perpendicular à bissetriz;

5. Marcar os pontos B e C, obtidos pela intersecção da reta s com os lados do ângulo α;

6. Os pontos A, B e C determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.29 ilustra os passos da construção.

Figura 4.29: Construção 4.29



4.4 Triângulo Retângulo

4.4.1 Construir um triângulo retângulo isósceles sendo dada sua altura.

Passos:

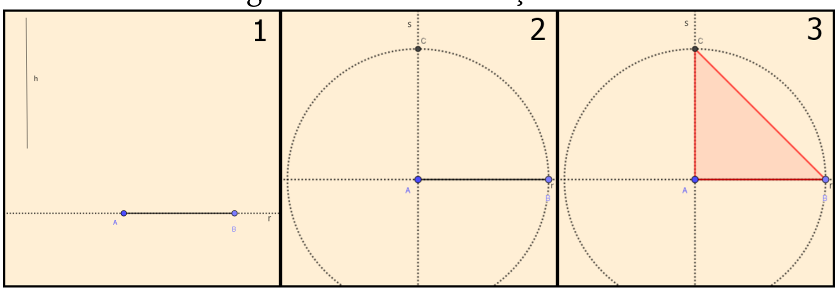
1. Considerar h a medida da altura do triângulo. Em uma reta r, marcar pontos A e B, de modo que o segmento $\overline{AB}$ tenha medida h;

2. Traçar uma reta s perpendicular a r passando por A e marcar o ponto C nessa reta, de modo que o segmento $\overline{AC}$ tenha a mesma medida da altura;

3. Os pontos A, B e C determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.30 ilustra os passos da construção.

Figura 4.30: Construção 4.30



4.4.2 Construir um triângulo retângulo sendo dados a hipotenusa e um ângulo agudo.

Passos:

1. Considerar o segmento $\overline{AB}$ a hipotenusa e α o ângulo agudo;

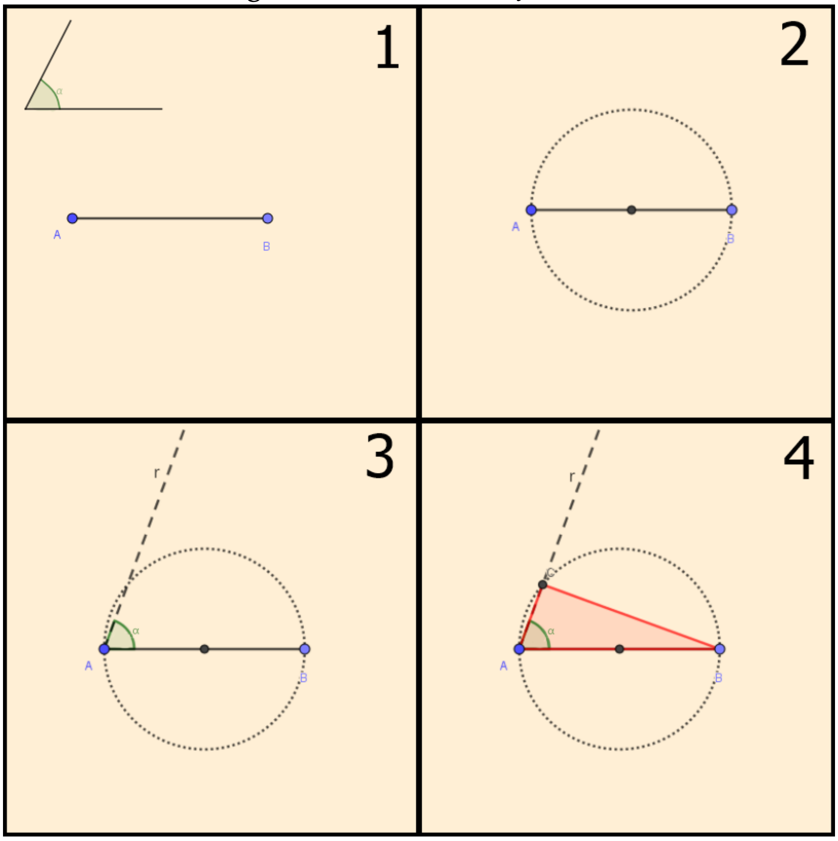
2. Traçar uma circunferência cujo raio seja metade de $\overline{AB}$;

3. Construir uma semirreta r com origem em A, tal que, junto com o segmento $\overline{AB}$, determina um ângulo congruente a α;

4. Marcar o ponto C na circunferência descrita, obtido pela intersecção com a semirreta r. Sendo assim, os pontos A, B e C determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.31 ilustra os passos da construção.

Figura 4.31: Construção 4.31



4.4.3 Construir um triângulo retângulo sendo dadas as medidas h da hipotenusa e c de um dos seus catetos.

Passos:

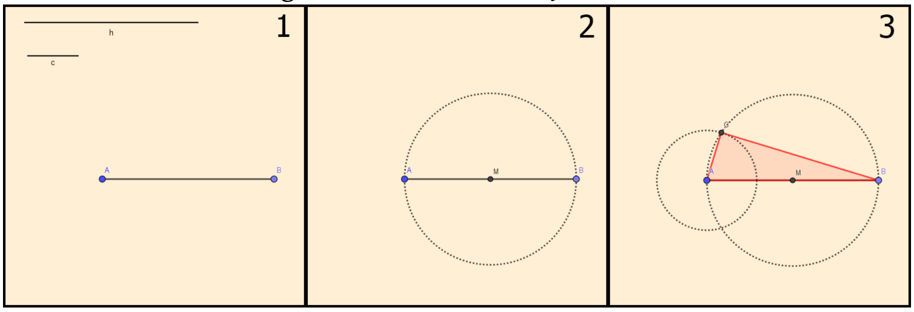
1. Considerar h a medida da hipotenusa e c a medida de um dos catetos. Em seguida, construir um segmento de comprimento fixo $\overline{AB}$ de medida h;

2. Determinar M ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Com centro em M, traçar uma circunferência de raio $\overline{MA}$;

3. Traçar outra circunferência com centro em A e raio c, na qual um dos pontos de intersecção com a primeira circunferência é C. Assim, os pontos A, B e C determinam o triângulo procurado.

A Figura 4.32 ilustra os passos da construção.

Figura 4.32: Construção 4.32



Capítulo 5

Quadriláteros

5.1 Quadrado

5.1.1 Construir um quadrado dado um lado.

Passos:

1. Considerar o lado AB. Traçar a partir de A uma reta r perpendicular ao segmento $\overline{AB}$. No mesmo sentido da reta r, traçar uma reta s perpendicular a $\overline{AB}$ passando por B;

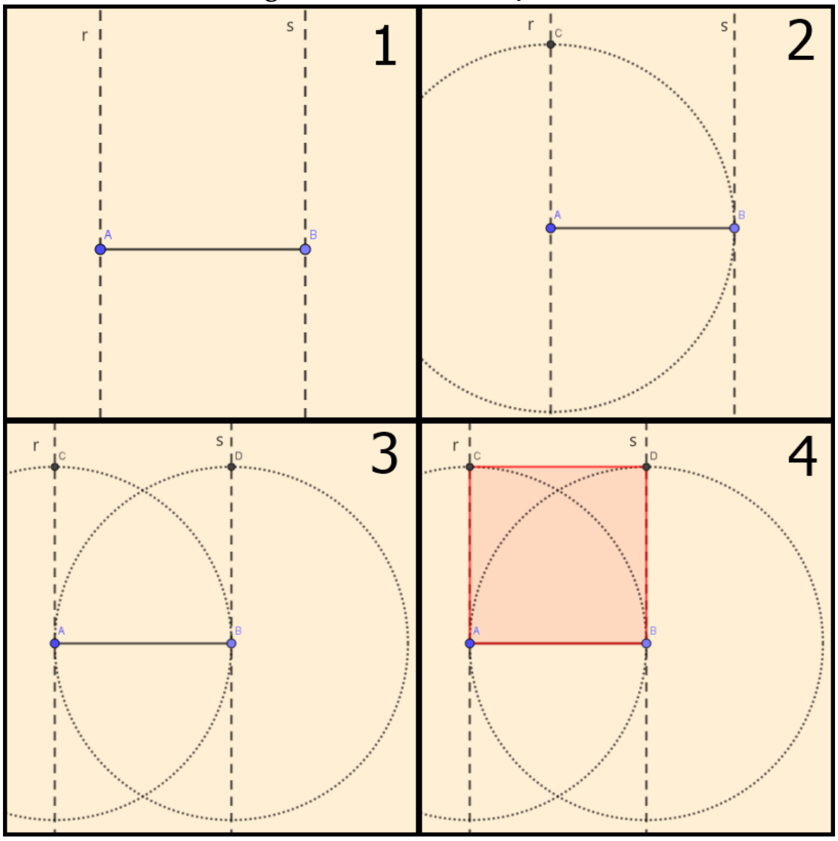
2. Traçar uma circunferência com centro no ponto A e raio de medida igual ao segmento $\overline{AB}$, em seguida, marcar o ponto C de intersecção com a reta r;

3. Traçar uma circunferência com centro no ponto B e raio de medida igual ao segmento $\overline{AB}$, em seguida, marcar o ponto D de intersecção com a reta s;

4. Os pontos A, B, D e C definem o quadrado procurado.

A Figura 5.1 ilustra os passos da construção.

Figura 5.1: Construção 5.1



5.1.2 Construir um quadrado dada sua diagonal.

Passos:

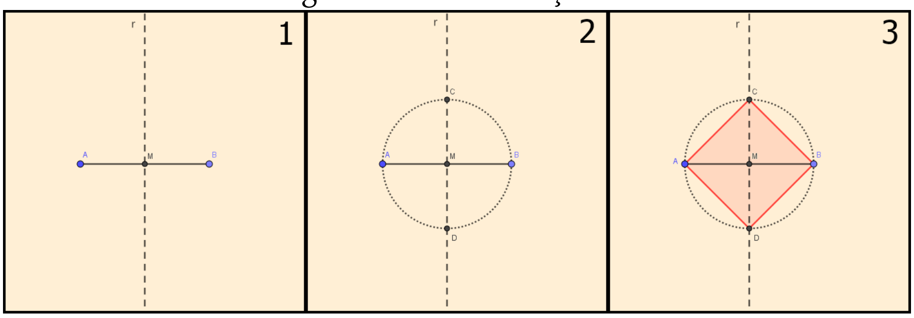
1. Considerar $\overline{AB}$ a diagonal dada. Marcar o seu ponto médio M e traçar uma reta perpendicular r à $\overline{AB}$ passando pelo ponto M;

2. Traçar uma circunferência com centro no ponto M e raio de medida igual ao segmento $\overline{MA}$, que intercepta a reta r nos pontos C e D;

3. Os pontos A, C, B e D determinam o quadrado procurado.

A Figura 5.2 ilustra os passos da construção.

Figura 5.2: Construção 5.2



5.1.3 Construir um quadrado dado o apótema.

Passos:

1. Considerar o segmento $\overline{HI}$ o apótema[1] de um quadrado. Traçar a reta r perpendicular a $\overline{HI}$ na extremidade H;

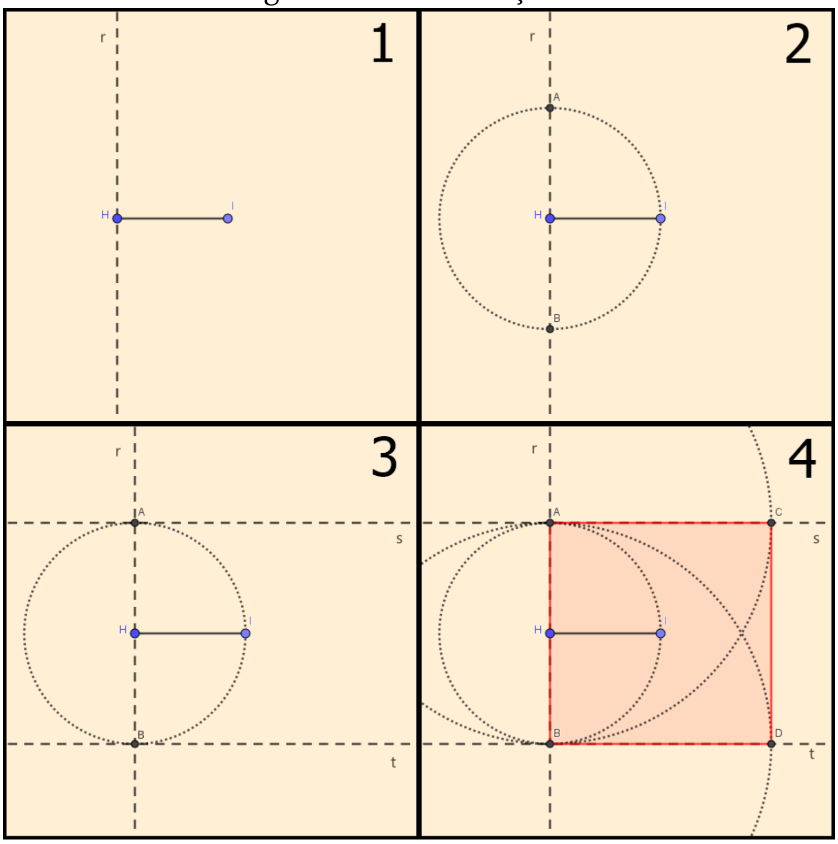
2. Traçar uma circunferência com raio de medida $\overline{HI}$ e centro H, que intercepta a reta r nos pontos A e B;

3. Traçar as retas s e t, perpendiculares a reta r nas extremidades A e B, respectivamente;

4. Traçar circunferências com centros em A e B e raio de medida igual ao segmento $\overline{AB}$, marcar os pontos C e D sobre as retas s e t, respectivamente. Os pontos A, B, D e C determinam o quadrado procurado

A Figura 5.3 ilustra os passos da construção.

Figura 5.3: Construção 5.3



5.2 Losango

5.2.1 Construir um losango sendo dados um lado e uma diagonal.

Passos:

1. Considerar $\overline{AB}$ a diagonal dada e l a medida do lado, tal que l seja maior que a metade da diagonal $\overline{AB}$;

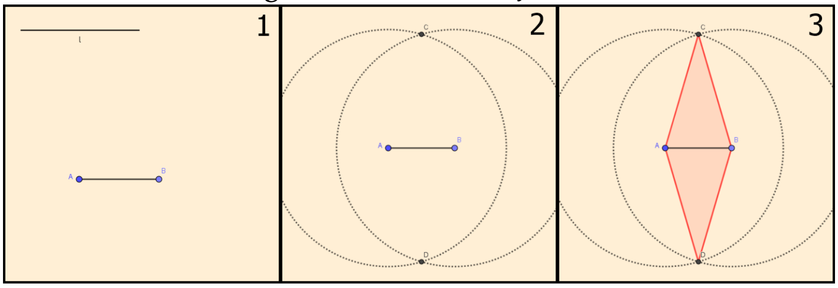
2. Traçar circunferências de raio igual a l com centros nos pontos A e B. Em seguida, marcar C e D pontos de intersecção dessas circunferências;

3. Os pontos A, C, B e D determinam o losango procurado.

[1] O apótema de um quadrado é o segmento que liga o seu centro ao ponto médio de um de seus lados.

A Figura 5.4 ilustra os passos da construção.

Figura 5.4: Construção 5.4



5.2.2 Construir um losango sendo dados um ângulo e um lado.

Passos:

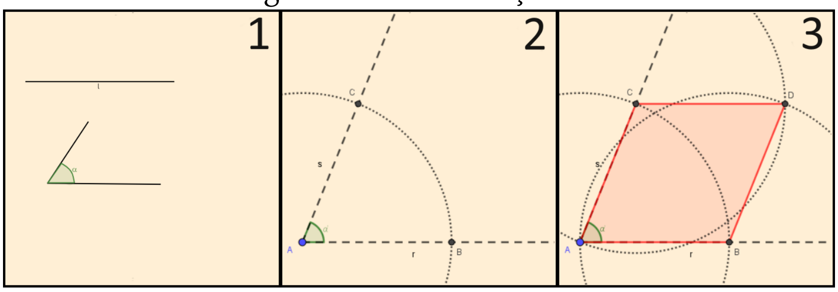
1. Considerar α o ângulo dado e l a medida do lado;

2. Construir um ângulo α' congruente ao ângulo α sobre uma semirreta r com origem em um ponto A, tal que os lados de α' sejam r e s. Com centro no ponto A e raio l traçar uma circunferência e marcar o ponto B sobre a semirreta r e o ponto C sobre a semirreta s, obtidos da intersecção com essa circunferência;

3. Com centro nos pontos B e C, e abertura do compasso medindo l, traçar duas circunferências que se interceptam em D. Os pontos A, B, C e D determinam o losango procurado.

A Figura 5.5 ilustra os passos da construção.

Figura 5.5: Construção 5.5



5.2.3 Construir um losango dadas suas diagonais.

Passos:

1. Considerar d_1 e d_2 as medidas das diagonais;

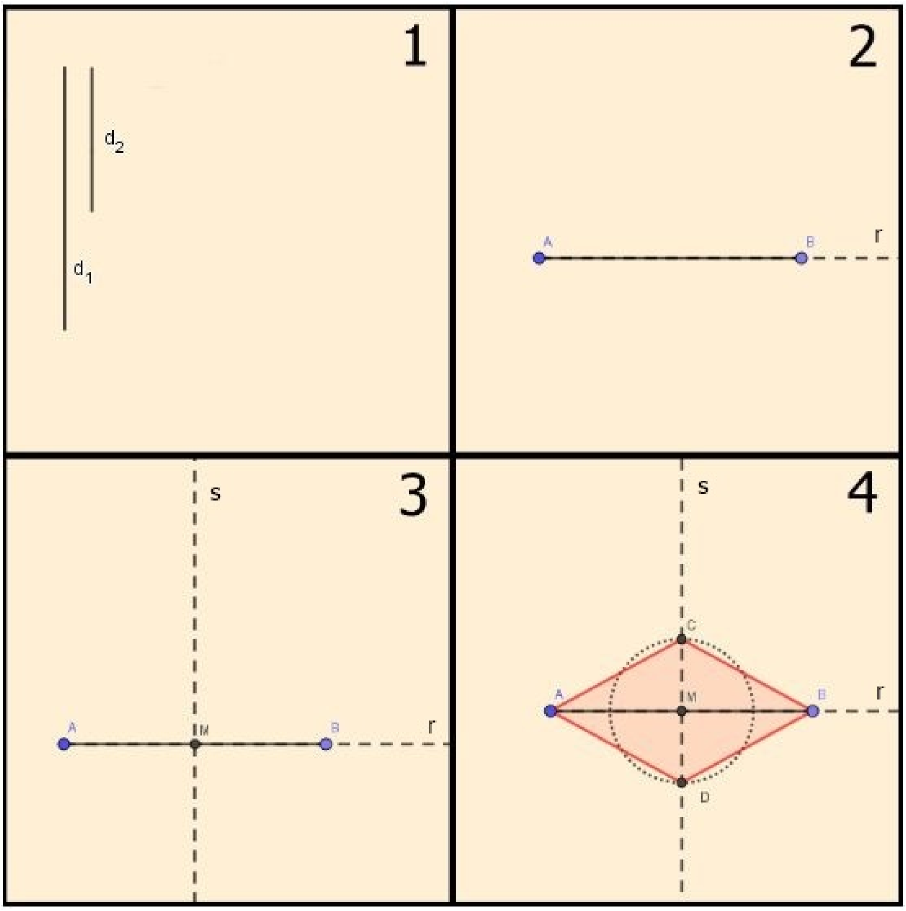
2. Traçar um segmento $\overline{AB}$ de medida d_1 sobre uma semirreta r, com origem em um ponto A;

3. Determinar o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ e traçar uma reta s perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando por esse ponto;

4. Traçar uma circunferência com centro em M e raio igual a metade de d_2 que intercepta s em C e D. Os pontos A, C, B e D determinam o losango procurado.

A Figura 5.6 ilustra os passos da construção.

Figura 5.6: Construção 5.6



5.3 Trapézio Isósceles

Um trapézio isósceles é aquele cujos lados opostos não paralelos são iguais.

5.3.1 Construir um trapézio isósceles, sendo dados dois lados e um ângulo formado por eles.

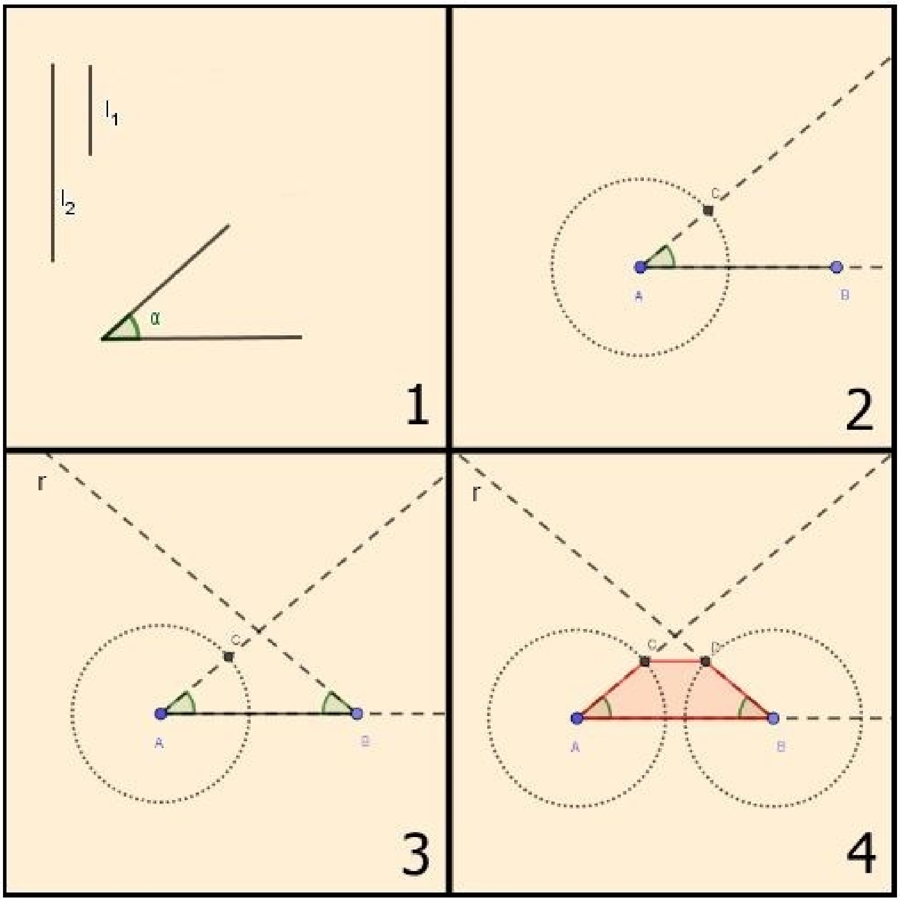
Passos:

1. Considerar l_1 e l_2 as medidas dos lados contíguos[2] e α o ângulo dado;
2. Traçar os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ de medidas l_1 e l_2, respectivamente, de modo que formem o ângulo α' congruente ao ângulo α;
3. Traçar uma semirreta r, com origem no ponto B, de modo que o ângulo entre o segmento $\overline{AB}$ e r seja congruente ao ângulo α;
4. Marcar o ponto D, sobre r, tal que $\overline{BD}$ tenha comprimento l_1. Os pontos A, B, D e C determinam o trapézio isósceles procurado.

[2]Lados contíguos são lados adjacentes.

A Figura 5.7 ilustra os passos da construção.

Figura 5.7: Construção 5.7



5.4 Paralelogramo

Paralelogramo é um polígono de quatro lados (quadrilátero) cujos lados opostos são paralelos.

5.4.1 Construir um paralelogramo sendo dados dois lados e o ângulo formado por eles.

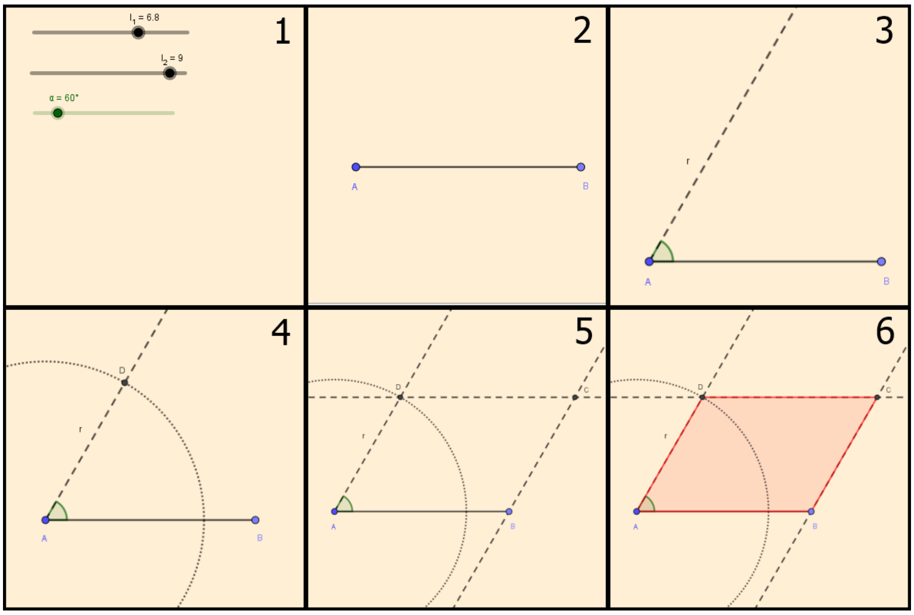
Passos:

1. Considerar l_1 e l_2 as medidas dos lados e α o ângulo;
2. Traçar o segmento $\overline{AB}$ de medida l_2;
3. Transportar o ângulo α na extremidade A tal que os lados do ângulo sejam AB e r;
4. Marcar o ponto D, sobre a semirreta r, de modo que o segmento $\overline{AD}$ tenha medida l_1;
5. Traçar, por D e B, retas s e t paralelas a $\overline{AB}$ e r, respectivamente. Marcar o ponto C de intersecção de s e t;

6. Os pontos A, B, C e D determinam o paralelogramo procurado.

A Figura 5.8 ilustra os passos da construção.

Figura 5.8: Construção 5.8



Capítulo 6

Outros Polígonos

6.1 Pentágono

Pentágono é um polígono de cinco lados.

6.1.1 Construir um pentágono regular.

Passos:

1. Descrever uma circunferência c de centro O e raio qualquer e marcar dois diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ perpendiculares entre si;

2. Encontrar o ponto médio M do segmento $\overline{AO}$. Com centro no ponto M e raio $\overline{MA}$, traçar uma circunferência;

3. Unir os pontos M e C e marcar o ponto E, intersecção da circunferência com o segmento $\overline{MC}$;

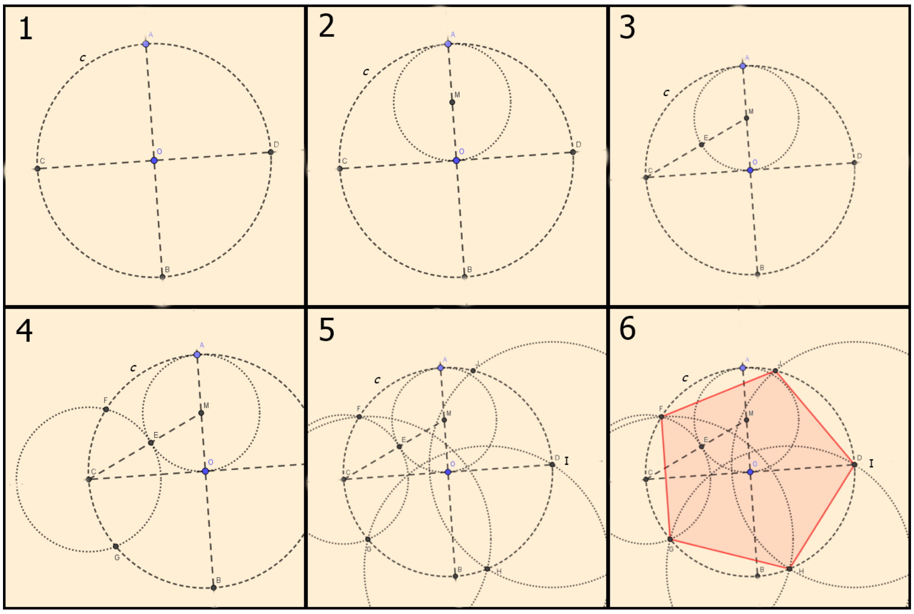
4. Traçar uma circunferência com centro no ponto C e raio $\overline{CE}$, que intercepta a circunferência c nos pontos F e G;

5. O segmento $\overline{FG}$ é o lado do pentágono regular. Com centro no ponto G e raio de medida igual ao segmento $\overline{FG}$, marcar o ponto H sobre a circunferência c. Com centro no ponto H e raio anterior, marcar o ponto I. Com centro no ponto I e mesmo raio, marcar o ponto J;

6. Assim, os pontos F, G, H, I e J determinam o pentágono procurado.

A Figura 6.1 ilustra os passos da construção.

Figura 6.1: Construção 6.1



6.1.2 Construir um pentágono regular sendo dado um lado.

Passos:

1. Considerar l a medida do lado. Traçar o segmento $\overline{AB}$ de medida l;

2. Traçar duas circunferências c_1 e c_2 com centros em A e B e raio l, que se interceptam nos pontos C e D, respectivamente. Traçar por C e D uma semirreta r com origem em D;

3. Traçar uma circunferência c_3 com centro no ponto D e raio l, que intercepta as duas anteriores nos pontos E e F;

4. Marcar o ponto G, intersecção da circunferência c_3 com a semirreta r. Traçar as retas s, passando por E e G, e t, passando por F e G;

5. Marcar o ponto H de intersecção de c_1 com t tal que o ponto G esteja entre os pontos F e H. Marcar I, intersecção de c_2 com s tal que o ponto G esteja entre os pontos E e I;

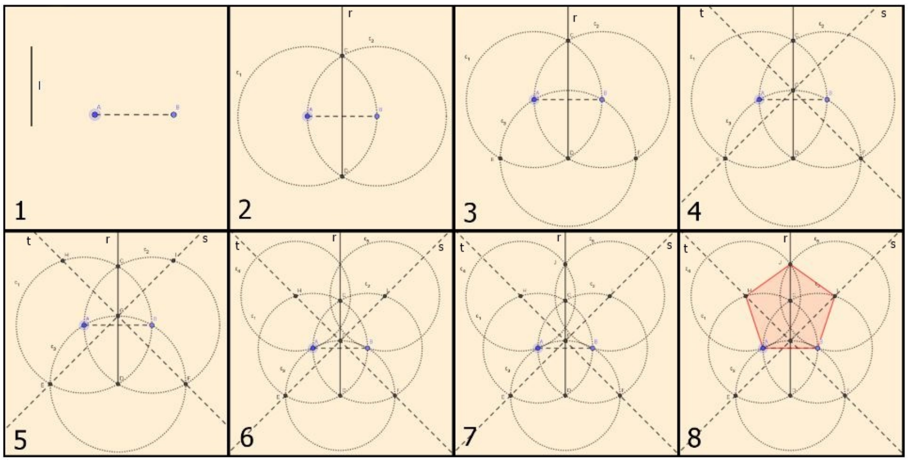
6. Traçar uma circunferência c_4 com centro em H de raio l. Traçar uma circunferência c_5 com centro em I e raio l;

7. Marcar J intersecção de c_4 com r tal que o ponto C esteja entre G e J;

8. Os pontos A, B, I, J e H determinam o pentágono procurado.

A Figura 6.2 ilustra os passos da construção.

Figura 6.2: Construção 6.2



6.2 Hexágono

Hexágono é um polígono de seis lados.

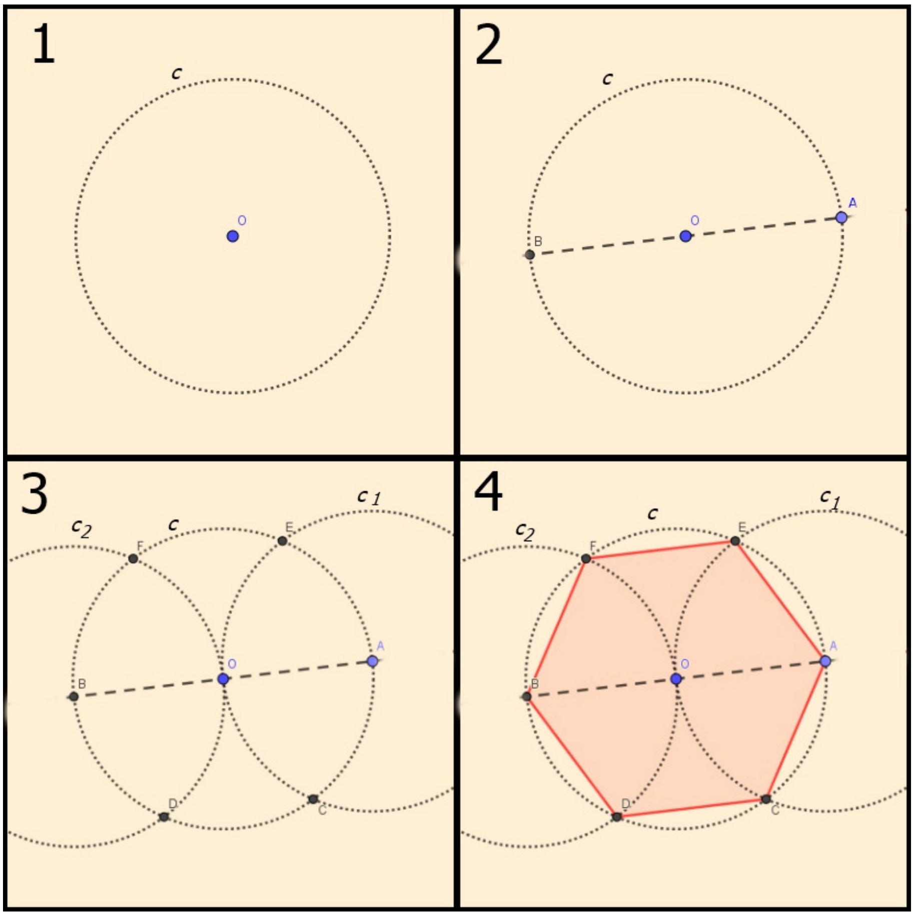
6.2.1 Construir um hexágono.

Passos:

1. Considerar uma circunferência c de centro O e raio qualquer;
2. Marcar o seu diâmetro $\overline{AB}$;
3. Traçar uma circunferência c_1, com centro no ponto A e raio $\overline{AO}$, que intercepta a circunferência c nos pontos C e E. Do mesmo modo, com centro no ponto B e mesmo raio, traçar uma circunferência c_2 que intercepta a circunferência c nos pontos D e F;
4. O hexágono A, C, D, B, F e E é o procurado.

A Figura 6.3 ilustra os passos da construção.

Figura 6.3: Construção 6.3



6.2.2 Construir um hexágono sendo dado um lado.

Passos:

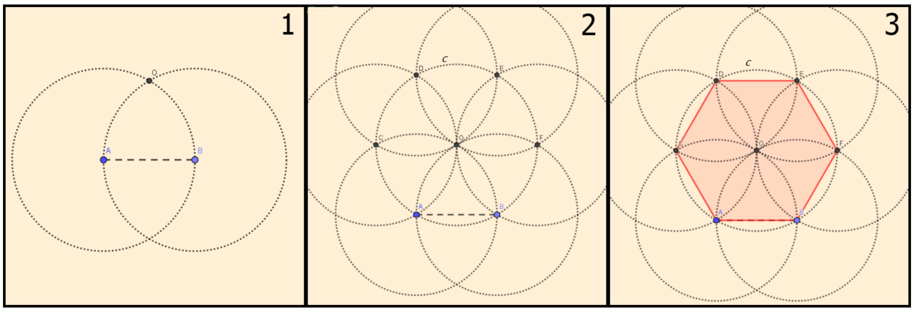
1. Considerar o lado AB, descrever duas circunferências: uma com centro em A e raio $\overline{AB}$ e outra com centro em B e mesmo raio. Marcar O uma das intersecções dessas circunferências;

2. Traçar uma circunferência c, com centro em O e raio $\overline{AB}$, que passa por A e B. A partir de A e com raio $\overline{AB}$, marcar em c os pontos C, D, E e F de modo a dividi-la em seis partes iguais;

3. Os pontos A, B, C, D, E e F definem o hexágono procurado.

A Figura 6.4 ilustra os passos da construção.

Figura 6.4: Construção 6.4



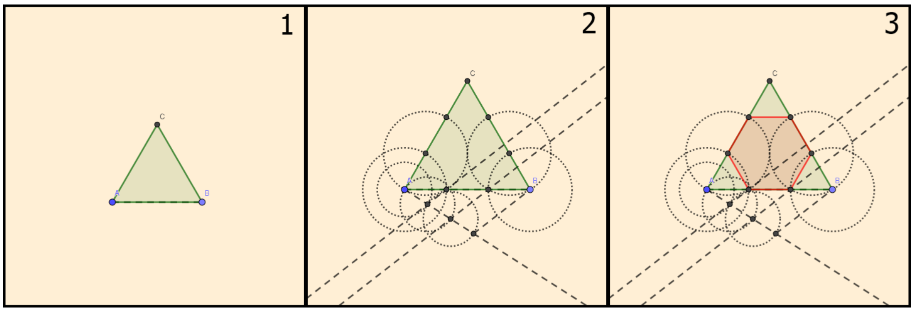
6.2.3 Construir um hexágono a partir de um triângulo equilátero.

Passos:

1. Considerar ABC um triângulo equilátero;
2. Dividir cada lado desse triângulo em três segmentos congruentes;
3. Os pontos definidos no passo 2 determinam o hexágono procurado.

A Figura 6.5 ilustra os passos da construção.

Figura 6.5: Construção 6.5



6.2.4 Construir um hexágono sendo dado o apótema.

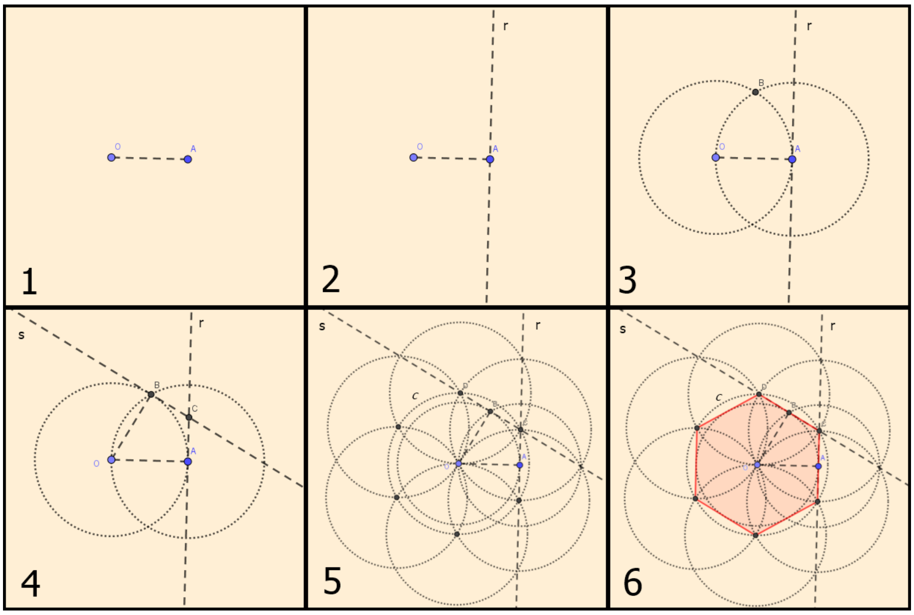
Passos:

1. Considerar $\overline{OA}$ o apótema;
2. Traçar uma reta r perpendicular ao segmento $\overline{OA}$, passando por A;
3. Traçar duas circunferências de raio $\overline{OA}$ e centros A e O, respectivamente. Marcar o ponto B como sendo uma das intersecções das circunferências;
4. Traçar uma reta s perpendicular ao segmento $\overline{OB}$ passando pelo ponto B e marcar C, intersecção de r e s;
5. Traçar c a circunferência de centro O e raio $\overline{OC}$. Marcar D, intersecção de c com a reta s. Transcrever sobre c segmentos justapostos de medida $\overline{CD}$;

6. Os pontos definidos no passo 5 determinam o hexágono procurado.

A Figura 6.6 ilustra os passos da construção.

Figura 6.6: Construção 6.6



6.3 Heptágono

Heptágono é um polígono de sete lados.

6.3.1 Construir um heptágono regular dada a medida de um lado.

Passos:

1. Considerar l a medida do lado. Sobre uma reta r transcrever um segmento $\overline{AB}$ do dobro da medida de l;

2. Marcar M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e traçar a perpendicular s passando por M;

3. Marcar C um dos pontos de intersecção de s com a circunferência de centro em A e raio como sendo o dobro de l. Os pontos A, B e C determinam o triângulo equilátero;

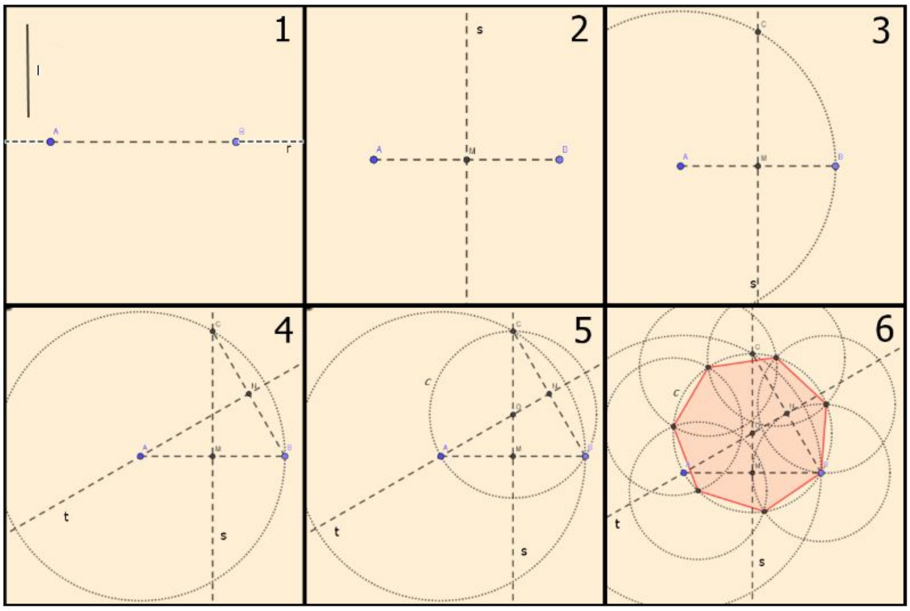
4. Marcar N o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e por N traçar a reta t perpendicular ao segmento $\overline{BC}$;

5. Marcar O ponto de intersecção de s e t. Traçar a circunferência c de centro O e raio $\overline{OC}$;

6. Fixar um ponto em c e a partir desse transcrever segmentos justapostos de medida l. Esses pontos definem o heptágono procurado.

A Figura 6.7 ilustra os passos da construção.

Figura 6.7: Construção 6.7



6.4 Octógono

Octógono é um polígono de oito lados.

6.4.1 Construir um octógono regular dada a medida de um lado.

Passos:

1. Considerar, sobre uma reta r, um segmento $\overline{AB}$ da medida do lado. Por A traçar uma reta s perpendicular a r;

2. Traçar uma circunferência c de centro em A e raio $\overline{AB}$. Marcar C um dos pontos de intersecção de s com c e determinar D uma das intersecções de r com c;

3. Traçar t a bissetriz do ângulo $D\widehat{A}C$ e marcar E intersecção de c com essa;

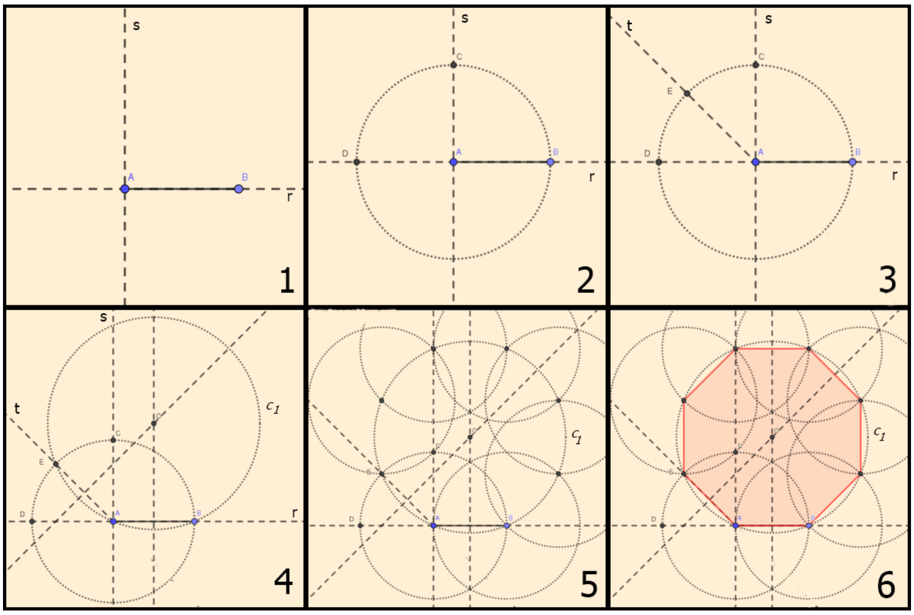
4. Traçar as mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AE}$ e marcar O a intersecção dessas. Traçar a circunferência c_1 de centro em O e raio $\overline{OA}$;

5. Transcrever sobre c_1 segmentos justapostos de medida $\overline{AB}$;

6. Os pontos obtidos no passo 5 determinam o octógono procurado.

A Figura 6.8 ilustra os passos da construção.

Figura 6.8: Construção 6.8



6.4.2 Construir um octógono regular inscrito numa circunferência.

Passos:

1. Considerar uma circunferência c de centro O e raio arbitrário. Traçar dois diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, de modo que $\overline{AB}$ seja perpendicular a $\overline{CD}$;

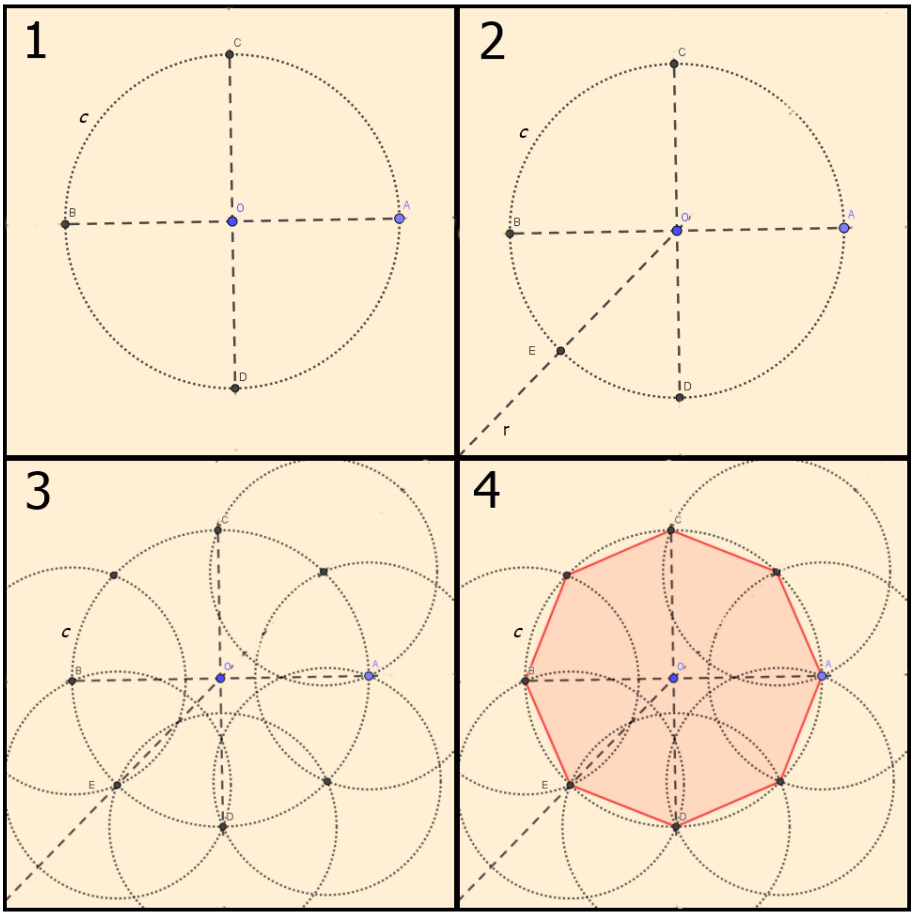
2. Traçar r a bissetriz do ângulo $B\widehat{O}D$ e marcar E a intersecção desta com c;

3. Transcrever sobre c segmentos justapostos de medida $\overline{BE}$;

4. Os pontos obtidos no passo 3 determinam o octógono procurado.

A Figura 6.9 ilustra os passos da construção.

Figura 6.9: Construção 6.9



6.4.3 Construir um octógono regular inscrito em um quadrado.

Passos:

1. Considerar um quadrado $ABCD$. Traçar sua diagonal $\overline{AC}$;

2. Traçar uma circunferência, centrada em A e raio $\overline{AB}$. Marcar o ponto E intersecção dessa com $\overline{AC}$;

3. Traçar a reta r perpendicular ao lado AB passando por E. Marcar F a intersecção de r com o lado $\overline{AB}$;

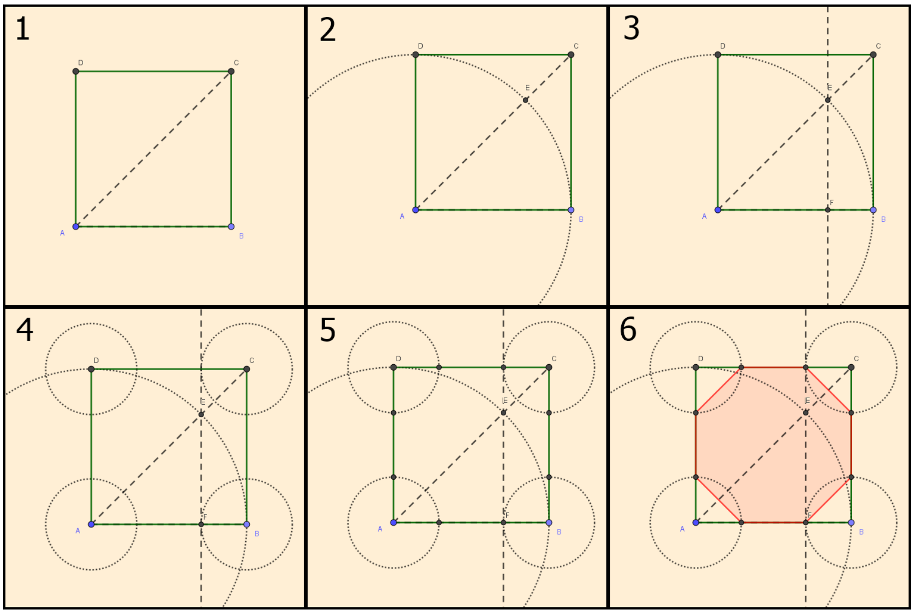
4. Traçar circunferências de raio $\overline{FB}$ e centros em cada vértice do quadrado;

5. As intersecções de cada circunferência com os lados do quadrado serão os vértices do octógono procurado;

6. Tem-se assim o octógono regular inscrito em um quadrado.

A Figura 6.10 ilustra os passos da construção.

Figura 6.10: Construção 6.10



6.5 Decágono

Polígono com 10 lados.

6.5.1 Construir um decágono regular.

Passos:

1. Considerar uma circunferência c de centro O e raio arbitrário. Traçar os diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, de modo que $\overline{AB}$ seja perpendicular a $\overline{CD}$;

2. Marcar M o ponto médio do segmento $\overline{OB}$. Traçar o segmento $\overline{MD}$;

3. Traçar a circunferência c_1 com centro em M e raio $\overline{OM}$ e marcar F intersecção dessa com o segmento $\overline{MD}$;

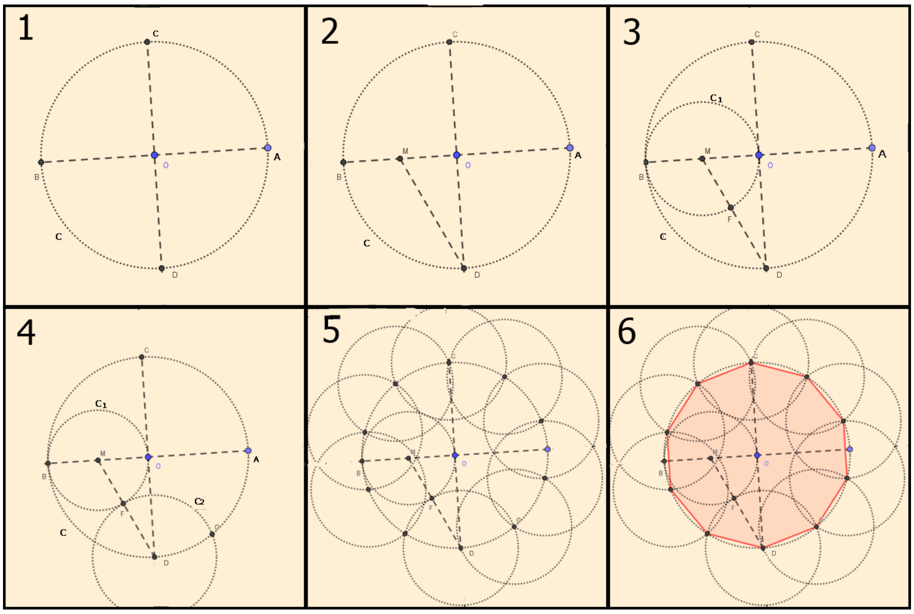
4. Traçar a circunferência c_2 de centro em D e raio $\overline{DF}$ e marcar G a intersecção dessa com c;

5. Transcrever sobre c segmentos justapostos de medida $\overline{DG}$;

6. Os pontos determinados no passo 5 determinam o decágono procurado.

A Figura 6.11 ilustra os passos da construção.

Figura 6.11: Construção 6.11



6.6 Dodecágono

Polígono de 12 lados.

6.6.1 Construir um dodecágono regular.

Passos:

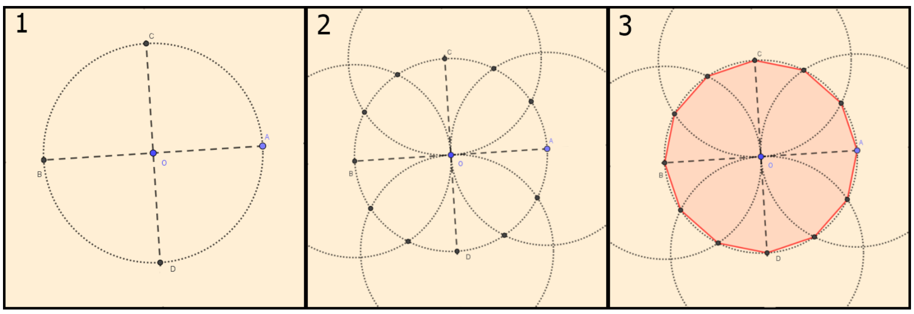
1. Considerar uma circunferência c de centro O e raio arbitrário. Traçar os diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, de modo que $\overline{AB}$ seja perpendicular a $\overline{CD}$;

2. Traçar as circunferências de raio $\overline{OA}$ e centros A, B, C e D. As intersecções dessas com a circunferência c são os vértices do dodecágono pedido;

3. Tem-se assim o dodecágono procurado.

A Figura 6.12 ilustra os passos da construção.

Figura 6.12: Construção 6.12



6.6.2 Construir um dodecágono regular dado a medida de um lado.

Passos:

1. Considerar l a medida do lado. Sobre uma reta r transcrever um segmento $\overline{AB}$ de comprimento l;

2. Marcar M, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, e sobre ele traçar a reta s, perpendicular a r;

3. Traçar a circunferência de centro A e raio l e marcar E intersecção dessa com s;

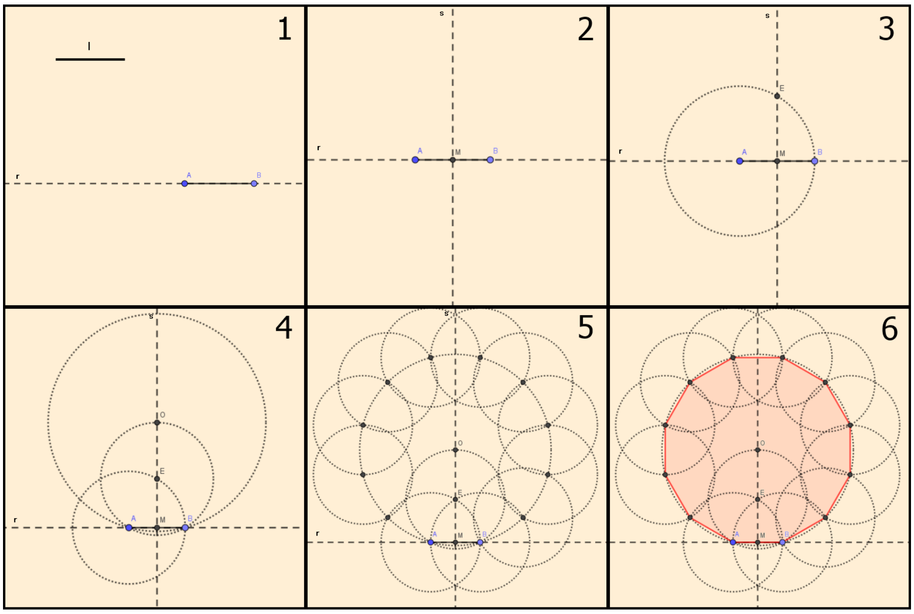
4. Traçar a circunferência c_1, de centro E e raio $\overline{AE}$, e marcar O intersecção dessa com s. Traçar a circunferência c_2, de centro O e raio $\overline{OA}$;

5. Transcrever sobre c_2 segmentos justapostos de medida l;

6. Os pontos definidos no passo 5 determinam o dodecágono procurado.

A Figura 6.13 ilustra os passos da construção.

Figura 6.13: Construção 6.13



Capítulo 7

Inscrição e Circunscrição

7.1 Inscrever um triângulo isósceles em um quadrado.

Passos:

1. Considerar $ABCD$ o quadrado dado;

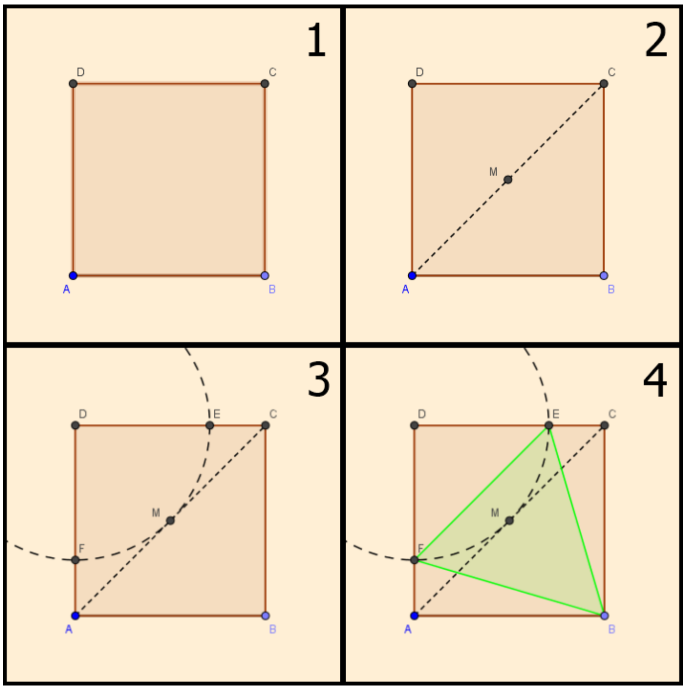
2. Traçar a diagonal $\overline{AC}$ e determinar M seu ponto médio;

3. Traçar uma circunferência com centro em D e raio $\overline{MD}$ e marcar F e E pontos de intersecção dessa com os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente;

4. Os pontos B, E e F determinam o triângulo procurado.

A Figura 7.1 ilustra os passos da construção.

Figura 7.1: Construção 7.1



7.2 Inscrever um quadrado em um triângulo.

Passos:

1. Considerar ABC o triângulo dado;

2. Marcar um ponto D qualquer, sobre o lado AB, desde que seja distinto das extremidades. Traçar a reta r perpendicular ao lado BC, passando por D, e determinar o ponto E de intersecção desses. Por D, traçar a reta s paralela ao lado BC;

3. Marcar um ponto C' sobre o lado BC, de modo que $\overline{EC'}$ tenha mesma medida de $\overline{ED}$;

4. Traçar uma reta t passando por C' e pararela ao segmento $\overline{DE}$, e marcar F o ponto de intersecção de s e t;

5. Determinar a semirreta com origem em B passando por F e marcar G o ponto de intersecção dessa com o lado AC;

6. Traçar uma reta u, paralela a t passando por G e determinar o ponto H de intersecção dessa com o lado BC;

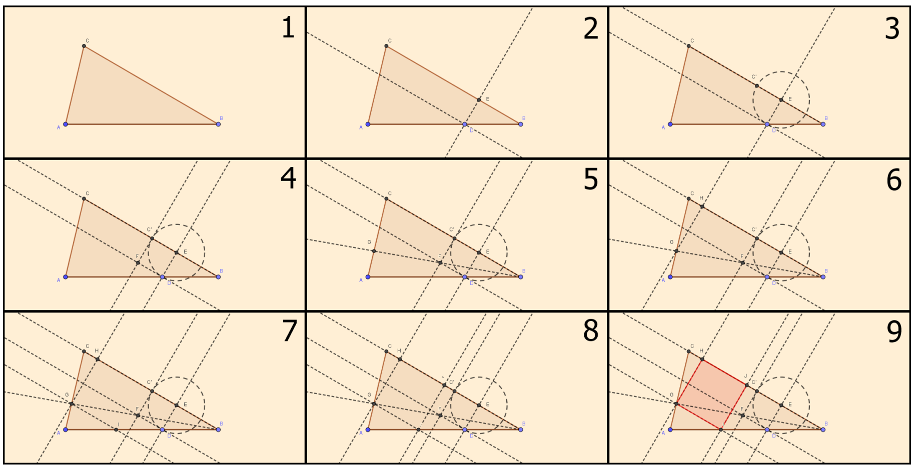
7. Traçar uma reta v, paralela a s passando por G e determinar I ponto de intersecção dessa com o lado AB;

8. Traçar uma reta w, paralela a t passando por I e marcar J ponto de intersecção dessa com o lado BC;

9. Os pontos G, H, J e I determinam o quadrado procurado.

A Figura 7.2 ilustra os passos da construção.

Figura 7.2: Construção 7.2



Observação: Essa construção não é válida para triângulos obtusângulos.

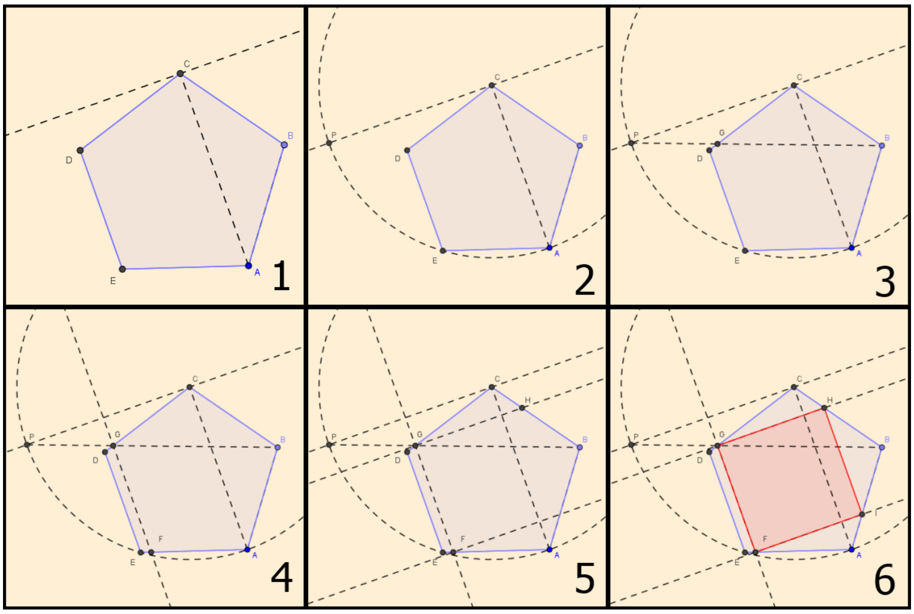
7.3 Inscrever um quadrado em um pentágono regular.

Passos:

1. Considerar $ABCDE$ o pentágono regular dado. Traçar a diagonal $\overline{AC}$ do pentágono dado e por C traçar uma perpendicular a diagonal construída;
2. Traçar um arco de circunferência com centro em C e raio $\overline{AC}$ que intercepta a reta perpendicular no ponto P:
3. Traçar o segmento $\overline{PB}$ e marcar o ponto G a intersecção desse segmento com o lado CD;
4. Traçar uma reta paralela a diagonal $\overline{AC}$ passando por G e marcar F a intersecção dessa reta com o lado AE;
5. Traçar retas perpendiculares $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{FI}$ ao lado DE, passando por G e F, respectivamente;
6. Os pontos F, G, H e I determinam o quadrado procurado.

A Figura 7.3 ilustra os passos da construção.

Figura 7.3: Construção 7.3



7.4 Inscrever um quadrado em um hexágono regular.

Passos:

1. Considerar $ABCDEF$ o hexágono dado;
2. Traçar o segmento $\overline{AD}$ e marcar O seu ponto médio;

3. Traçar, por D, a reta r perpendicular ao segmento $\overline{AD}$;

4. Traçar uma circunferência com centro em D e raio $\overline{OD}$ e marcar P uma das intersecções dessa com a reta r;

5. Traçar o segmento $\overline{OP}$ e denominar a intersecção desse segmento como o lado ED de G;

6. Traçar uma reta paralela a $\overline{EF}$ pasando por G e marcar o ponto H intersecção dessa com o lado AF;

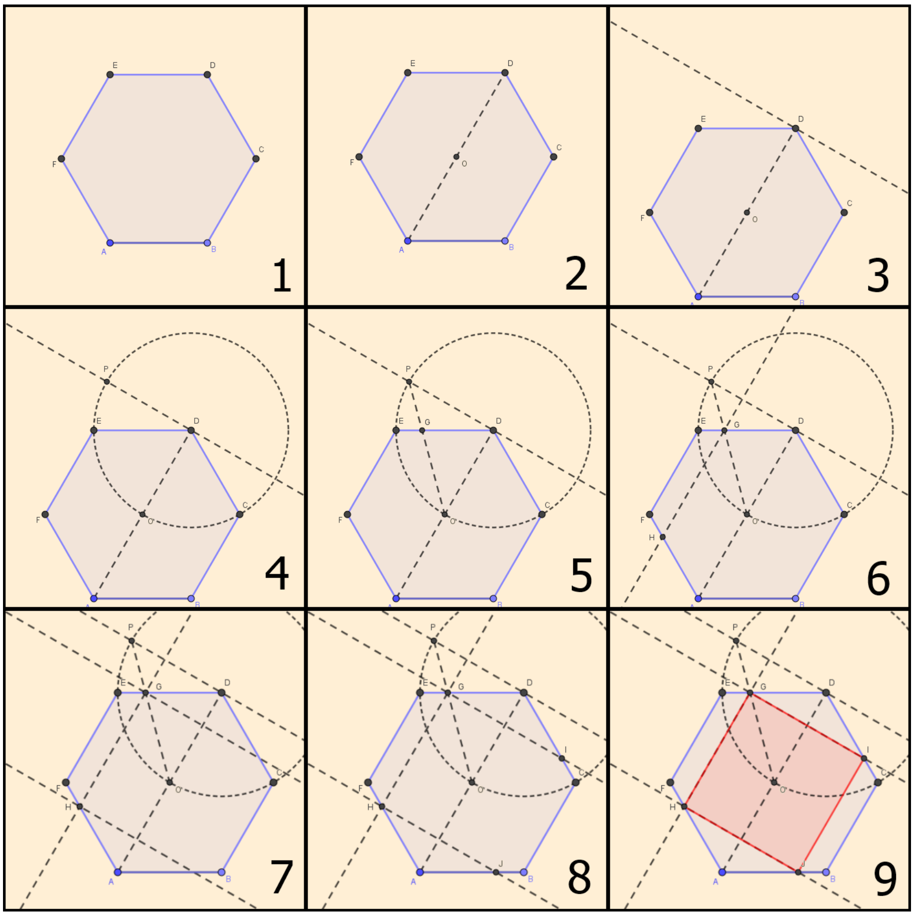
7. Traçar retas s e t perpendiculares ao lado EF passando por G e H, respectivamente;

8. Marcar I e J as intersecções de s com $\overline{CD}$ e de t com $\overline{AB}$, respectivamente;

9. Os pontos G, H, J e I determinam o quadrado procurado.

A Figura 7.4 ilustra os passos da construção.

Figura 7.4: Construção 7.4



7.5 Inscrever uma circunferência em um triângulo ABC dado.

Passos:

1. Considerar ABC o triângulo dado. Determinar as bissetrizes de dois ângulos do triângulo;

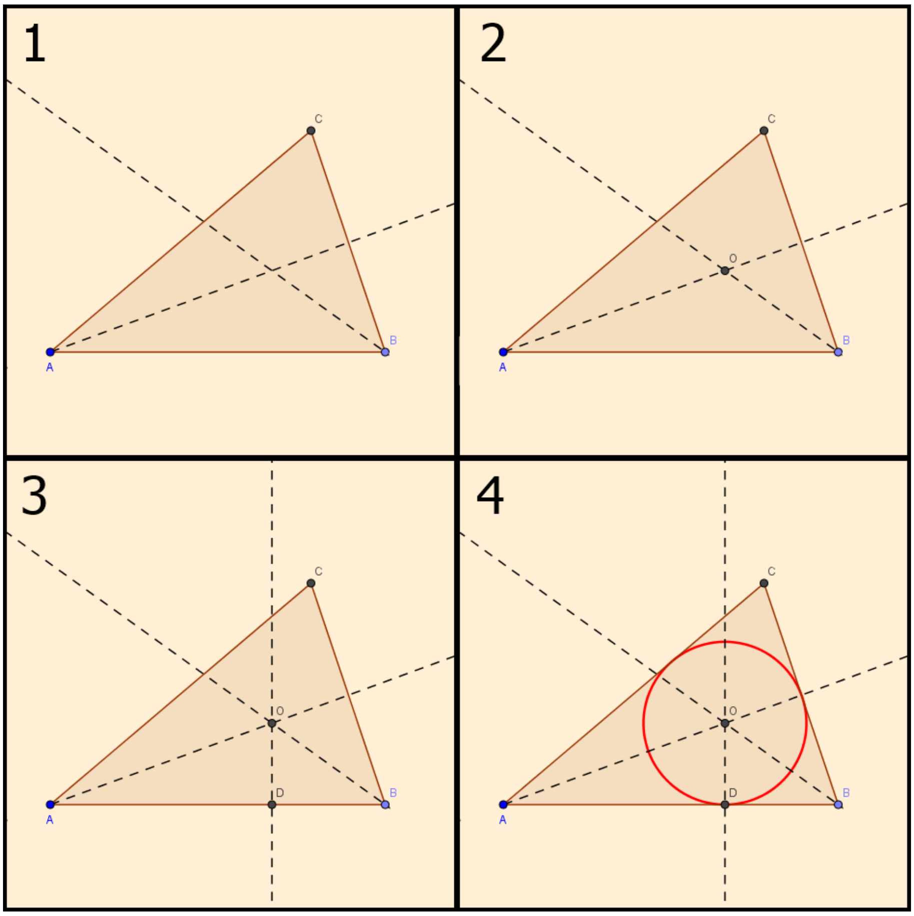
2. Marcar O intersecção das bissetrizes (incentro);

3. Traçar uma perpendicular a um dos lados passando por O. Marcar D o pé da perpendicular;

4. Traçar a circunferência de centro O e raio $\overline{OD}$. Essa é a circunferência procurada.

A Figura 7.5 ilustra os passos da construção.

Figura 7.5: Construção 7.5



7.6 Circunscrever um triângulo ABC dado.

Passos:

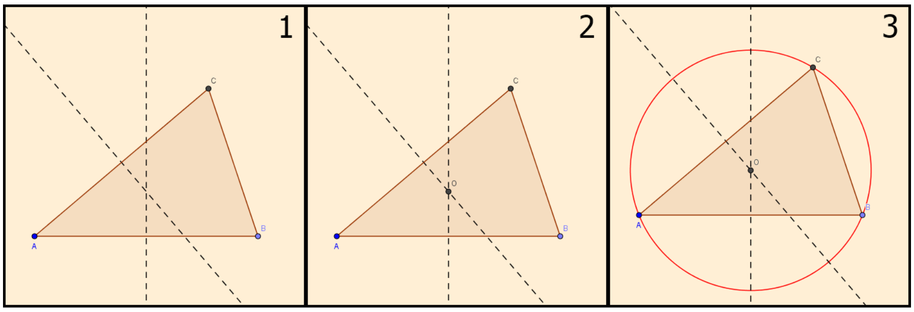
1. Considerar ABC o triângulo dado. Traçar as mediatrizes de dois lados do triângulo;

2. Determinar O intersecção das mediatrizes (circuncentro);

3. Traçar a circunferência de centro O e raio $\overline{OA}$. Essa é a circunferência procurada.

A Figura 7.6 ilustra os passos da construção.

Figura 7.6: Construção 7.6



7.7 Inscrever seis circunferências iguais em um triângulo equilátero ABC dado.

Passos:

1. Considerar ABC o triângulo dado. Determinar as bissetrizes dos ângulos do triângulo e denominar as intersecções das mesmas com os lados AC, AB e BC de B', C' e A', respectivamente;

2. Traçar a bissetriz do ângulo $A\widehat{C}C'$ e denominar de E o ponto de intersecção dessa bissetriz com a bissetriz $\overleftrightarrow{BB'}$;

3. Traçar uma reta paralela ao lado AC passando por E, que intercepta as bissetrizes $\overleftrightarrow{AA'}$ e
$overleftrightarrowCC'$ nos pontos G e F, respectivamente;

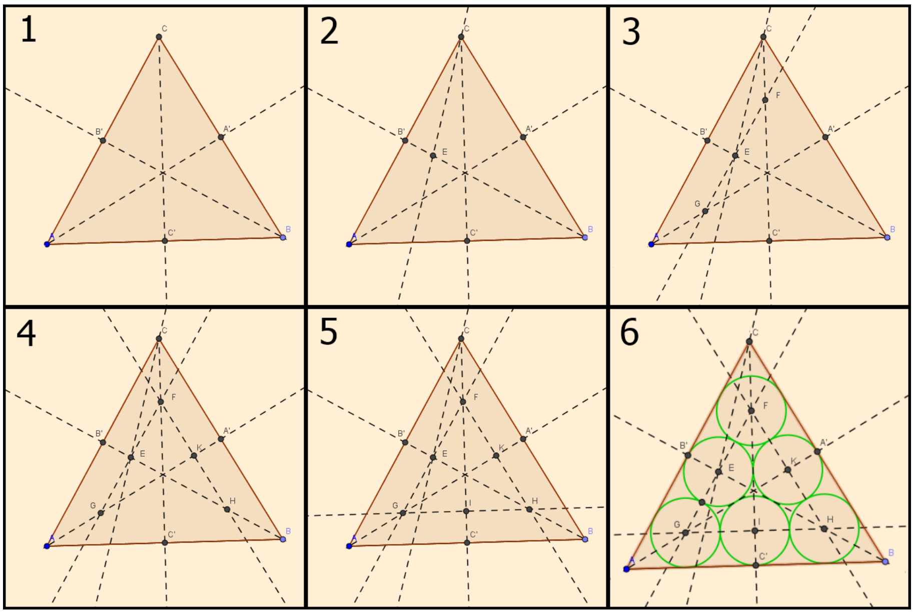
4. Traçar uma reta paralela ao lado CB, a partir do ponto F, que intercepta as bissetrizes $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ nos pontos K e H, respectivamente;

5. Traçar uma reta paralela ao lado AB, a partir do ponto H, que intercepta a bissetriz $C\vec{C}'$ no ponto I;

6. Os pontos E, F, G, K, H e I são os centros das circunferências solicitadas, cujo raio mede $\overline{EB'}$.

A Figura 7.7 ilustra os passos da construção.

Figura 7.7: Construção 7.7



7.8 Inscrever seis circunferências tangentes entre si internas a um hexágono regular.

Passos:

1. Considerar um hexágono regular $ABCDEF$, traçar o raio $\overline{OB}$ e a bissetriz do ângulo $O\widehat{B}C$;

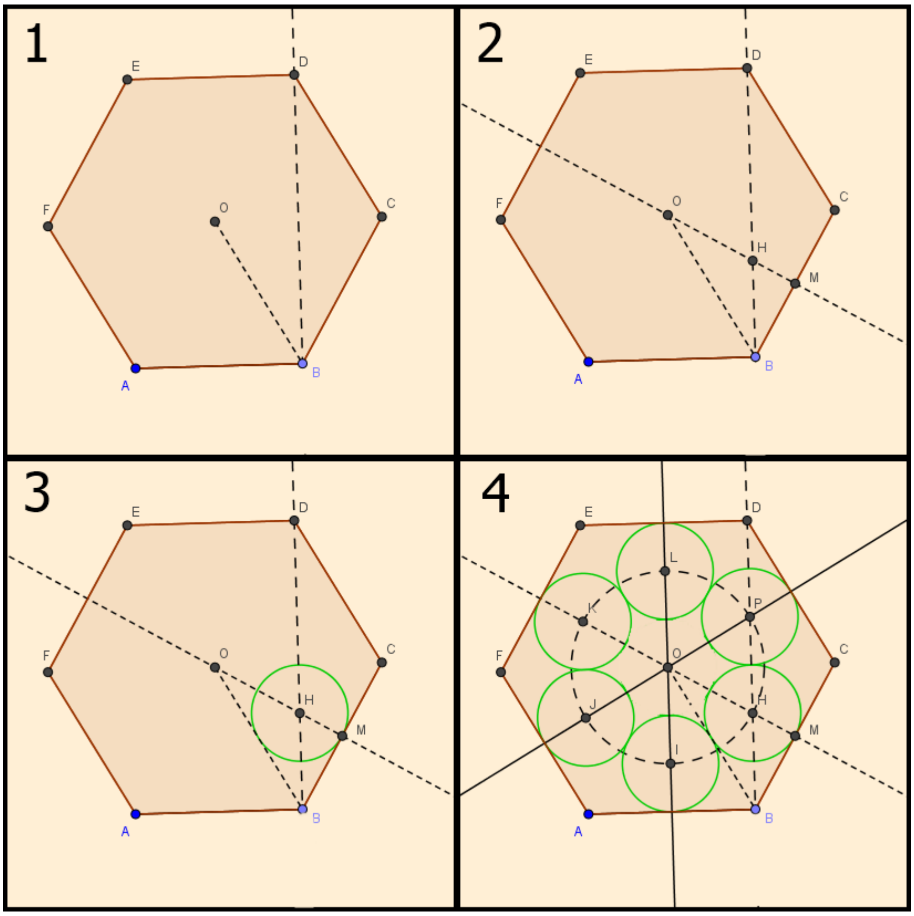
2. Traçar a mediatriz do lado BC. Marcar H, intersecção dessa com a bissetriz traçada anteriormente, e M o ponto médio do lado BC;

3. Traçar a circunferência de centro H e raio $\overline{HM}$. Essa é a primeira circunferência procurada;

4. Repetir o processo para os demais lados. Assim tem-se as circunferências procuradas.

A Figura 7.8 ilustra os passos da construção.

Figura 7.8: Construção 7.8



Observação: Este processo pode ser utilizado para inscrever circunferências em outros polígonos regulares.

7.9 Inscrever e circunscrever um quadrado $ABCD$ dado.

Passos:

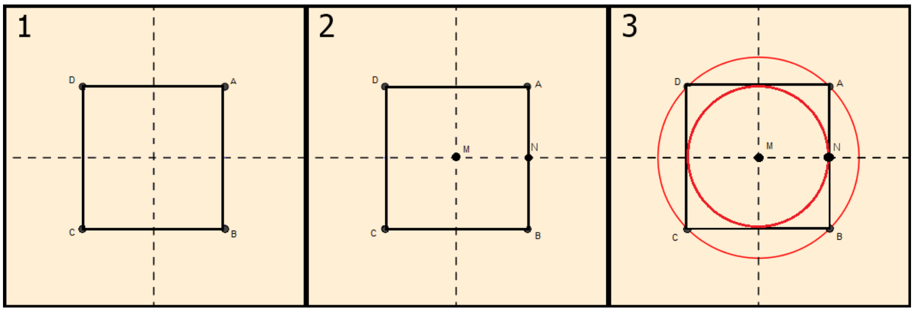
1. Considerar o quadrado $ABCD$. Traçar as mediatrizes dos lados do quadrado;

2. Determinar M intersecção das mediatrizes (incentro) e marcar N intersecção do lado AB com a mediatriz correspondente;

3. Traçar a circunferência de centro M e raio $\overline{MN}$. Essa é a circunferência inscrita procurada. Traçar a circunferência de centro em M e raio $\overline{MA}$. Essa é a circunferência que circunscreve o quadrado.

A Figura 7.9 ilustra os passos da construção.

Figura 7.9: Construção 7.9



7.10 Inscrever três circunferências a uma outra dada.

Passos:

1. Considerar a circunferência c de centro O. Dividir c em 6 partes iguais marcando os pontos A, B, C, D, E e F e traçar os diâmetros $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$;

2. Traçar por A uma reta tangente a circunferência. Prolongar o diâmetro por um dos pontos adjacentes ao ponto A (nesse caso ponto F), interceptando a reta tangente no ponto G;

3. Traçar a bissetriz do ângulo $A\widehat{G}F$ e denominar H sua intersecção com o diâmetro $\overline{AD}$;

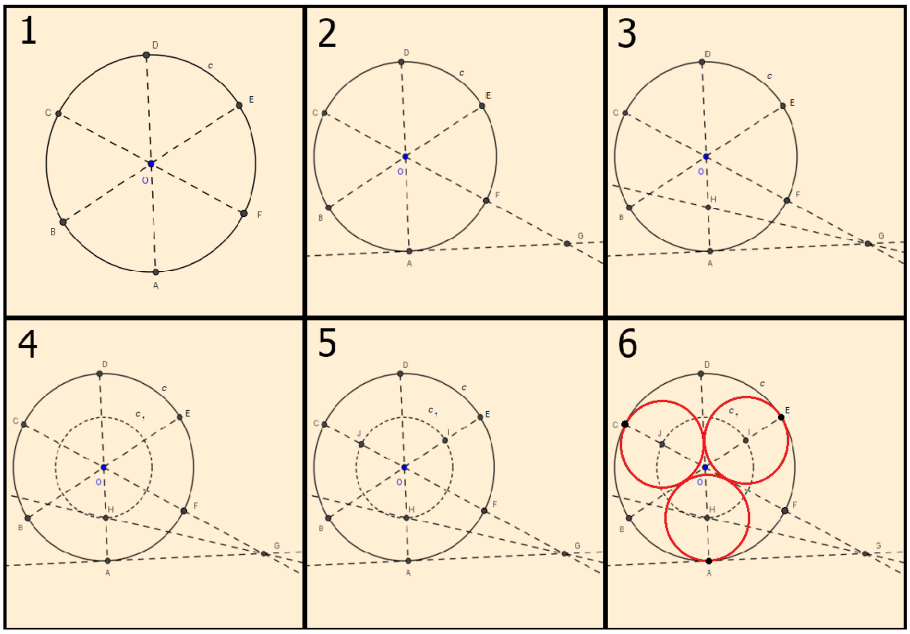
4. Traçar a circunferência c_1 de centro O e raio $\overline{OH}$;

5. Determinar os pontos J e I as intersecções de c_1 com os segmentos $\overline{CO}$ e $\overline{EO}$, respectivamente;

6. Os pontos H, I e J são os centros das circunferências pedidas que possuem raio $\overline{HA}$.

A Figura 7.10 ilustra os passos da construção.

Figura 7.10: Construção 7.10



Capítulo 8

Tangentes

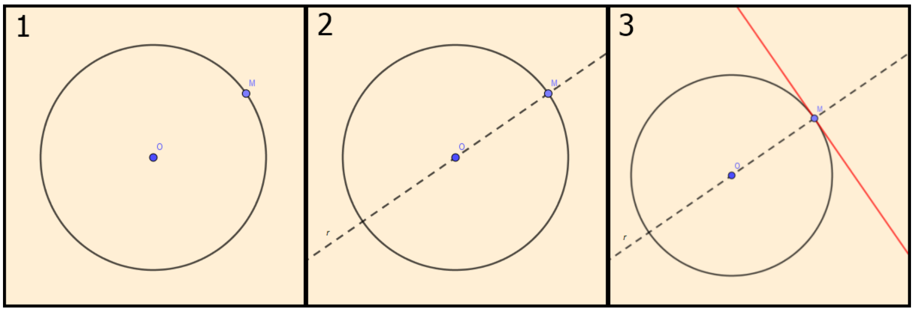
8.1 Dada uma circunferência e um ponto nessa, traçar uma reta tangente passando por esse ponto.

Passos:

1. Considerar O centro da circunferência dada e M um ponto sobre ela;
2. Traçar a reta r passando por O e M;
3. Traçar uma reta perpendicular a r passando por M. Esta é a reta tangente[1] procurada.

A Figura 8.1 ilustra os passos da construção.

Figura 8.1: Construção 8.1



8.2 Dado um ponto P pertencente a um arco de circunferência cujo centro é inacessível, traçar uma reta tangente a esse arco, passando por tal ponto.

Passos:

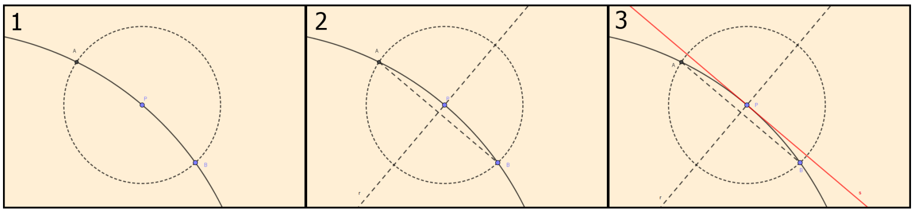
1. Traçar uma circunferência de raio qualquer com centro em P, de modo que interseccione o arco dado nos pontos A e B;
2. Traçar a mediatriz r do segmento $\overline{AB}$;

[1] Reta que toca a circunferência em um único ponto.

3. Traçar a reta s perpendicular a r, passando por P. Essa é a reta procurada.

A Figura 8.2 ilustra os passos da construção.

Figura 8.2: Construção 8.2



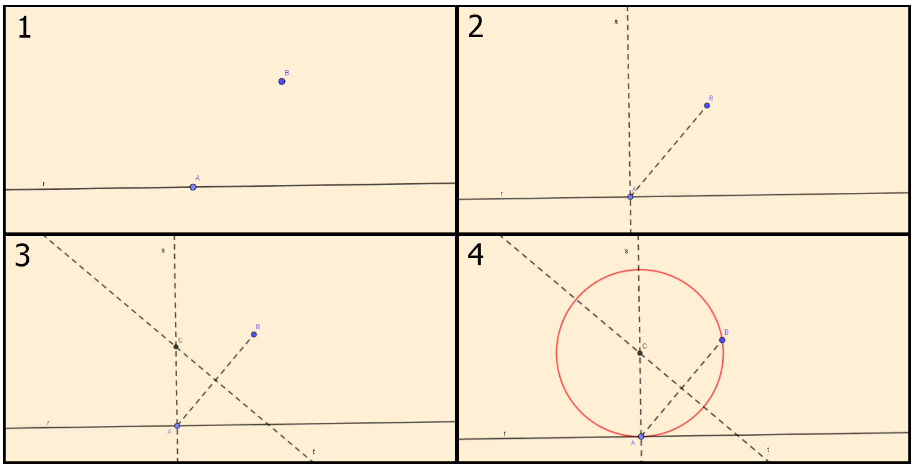
8.3 Dados uma reta r e A um ponto sobre ela, traçar uma circunferência tangente à r em A, passando por um ponto fora dela.

Passos:

1. Considerar r uma reta, A um ponto sobre ela e B um ponto que não pertence a r;
2. Traçar uma reta s perpendicular a r passando por A e traçar o segmento $\overline{AB}$;
3. Traçar a reta t mediatriz do segmento $\overline{AB}$, e marcar C intersecção de s e t;
4. O ponto C será o centro da circunferência pedida, que passa por A e B.

A Figura 8.3 ilustra os passos da construção.

Figura 8.3: Construção 8.3



8.4 Dadas uma circunferência c e uma reta r, traçar uma reta paralela a r e tangente a c.

Passos:

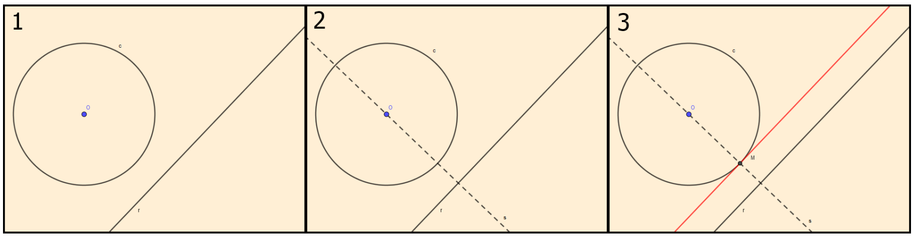
1. Considerar a circunferência c de centro O e uma reta r qualquer;

2. Traçar uma reta s perpendicular a r passando por O;

3. Marcar M ponto de intersecção entre c e s e por esse ponto traçar uma reta paralela a r. Essa é a reta procurada.

A Figura 8.4 ilustra os passos da construção.

Figura 8.4: Construção 8.4



8.5 Traçar retas tangentes a uma circunferência dada, passando por um ponto P exterior a essa circunferência.

Passos:

1. Considerar a circunferência de centro O e um ponto P exterior a ela. Traçar o segmento $\overline{PO}$;

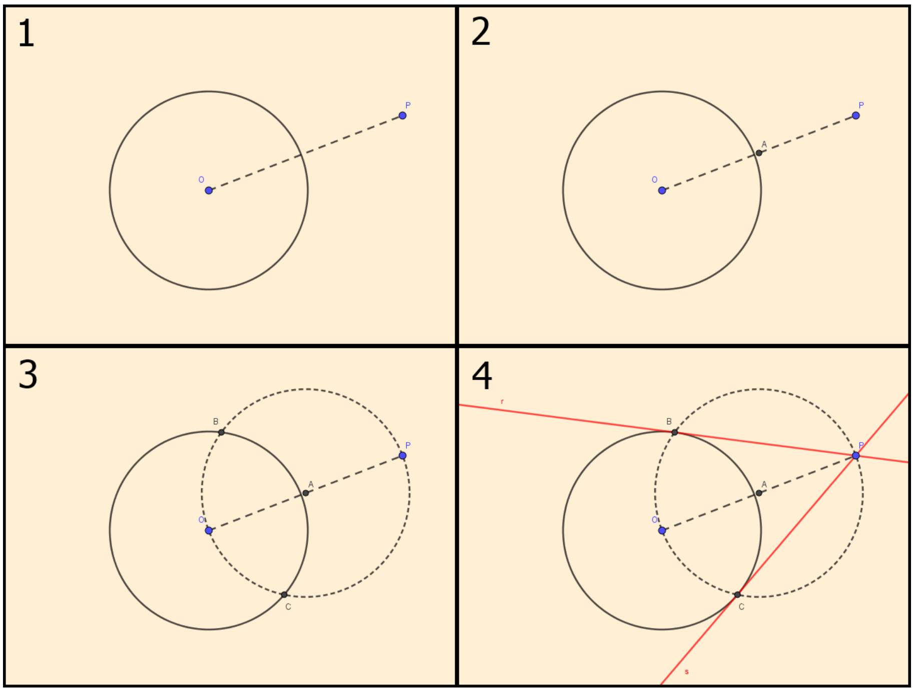
2. Marcar o ponto médio A do segmento $\overline{PO}$;

3. Traçar uma circunferência com centro em A e raio $\overline{OA}$, de modo que interseccione a circunferência dada nos pontos B e C;

4. Traçar a reta r, que passa pelos pontos B e P, e a reta s, que passa por C e P. Essas são as retas procuradas.

A Figura 8.5 ilustra os passos da construção.

Figura 8.5: Construção 8.5



8.6 Traçar uma circunferência tangente aos lados de um ângulo $B\widehat{A}C$.

Passos:

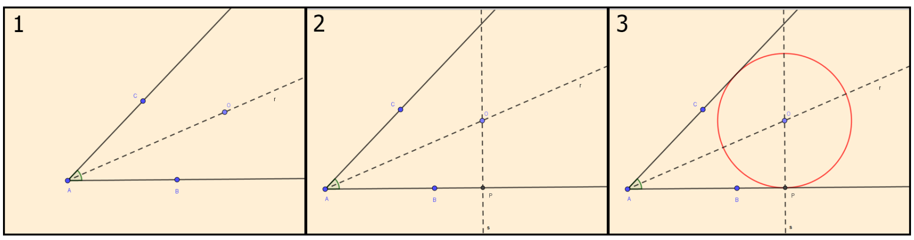
1. Considerar o ângulo $B\widehat{A}C$. Traçar a bissetriz r do ângulo dado e marcar O um ponto qualquer em r que seja interior ao ângulo;

2. Traçar, passando por O, a perpendicular s a um dos lados do ângulo dado e marcar P o pé dessa;

3. Traçar uma circunferência com centro O e raio $\overline{OP}$. Essa é a circunferência procurada.

A Figura 8.6 ilustra os passos da construção.

Figura 8.6: Construção 8.6



8.7 Traçar uma série de circunferências que sejam tangentes umas às outras e ao mesmo tempo aos lados de um ângulo dado.

Passos:

1. Considerar o ângulo $A\hat{B}C$ e traçar r a sua bissetriz;

2. Marcar no interior de $A\hat{B}C$ um ponto O em r e traçar por O a reta s perpendicular a $\overrightarrow{BC}$, cuja intersecção com $\overrightarrow{BC}$ é E;

3. Traçar uma circunferência com centro O e raio $\overline{OE}$. Essa é a primeira circunferência pedida;

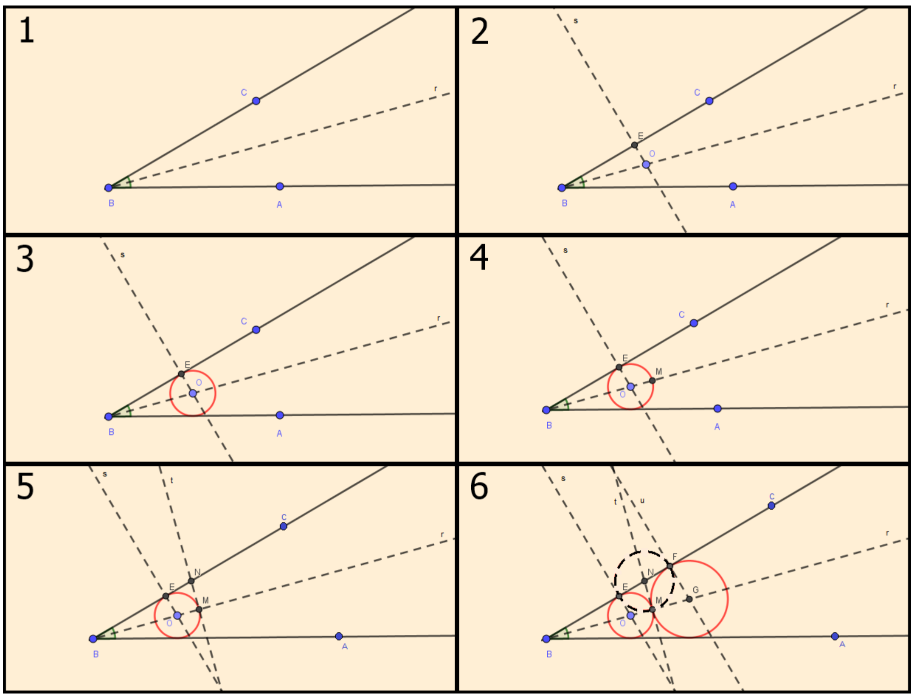
4. Marcar M a intersecção da circunferência com r;

5. Traçar a reta t perpendicular a r passando por M e marcar N intersecção de t com $\overrightarrow{BC}$;

6. Traçar a circunferência de centro em N e raio $\overline{NM}$ e marcar F a intersecção dessa com $\overrightarrow{BC}$, de modo que F não pertença a reta s. Por F, traçar a reta u perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ e marcar G intersecção de u com r. Com centro em G e raio $\overline{FG}$, traçar a segunda circunferência. Seguir o mesmo processo para construir uma série de circunferências.

A Figura 8.7 ilustra os passos da construção.

Figura 8.7: Construção 8.7



8.8 Traçar uma circunferência tangente a uma reta r dada, passando pelos pontos A e B pertencentes a reta s paralela a reta r.

Passos:

1. Considerar as retas r e s paralelas entre si e os pontos A e B sobre a reta s;

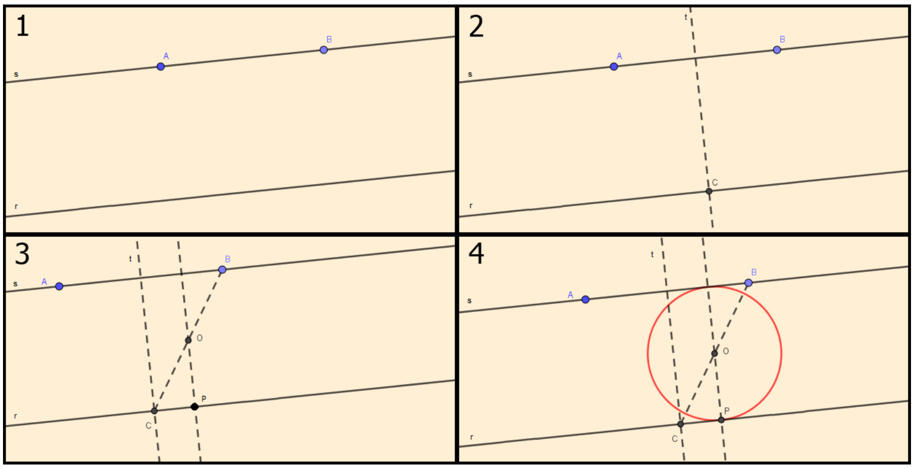
2. Traçar t a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ e marcar C ponto de intersecção das retas r e t ;

3. Considerar o segmento $\overline{BC}$ e determinar seu ponto médio O. Traçar uma reta paralela a t passando por O, denominando de P a interseção dessa com r;

4. Traçar a circunferência de centro em O passando por P. Essa é a circunferência procurada.

A Figura 8.8 ilustra os passos da construção.

Figura 8.8: Construção 8.8



8.9 Dadas duas retas paralelas e um ponto P entre elas, traçar uma circunferência tangente às retas e passando pelo ponto P.

Passos:

1. Considerar as retas r e s paralelas entre si e um ponto P entre elas;

2. Traçar uma reta perpendicular t às retas paralelas r e s, passando por qualquer ponto;

3. Marcar A e B os pontos de intersecção de t com as retas paralelas;

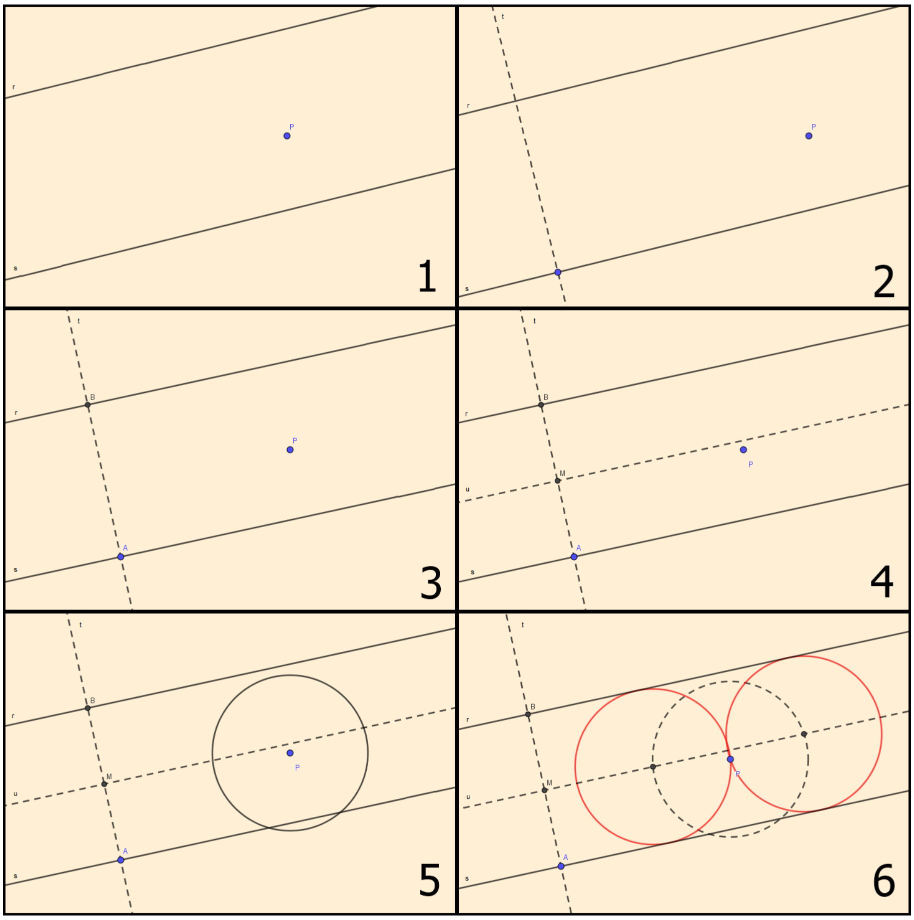
4. Marcar o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$, e traçar uma paralela u a reta r passando por M;

5. Traçar uma circunferência de centro P e raio $\overline{MA}$;

6. Marcar os pontos de intersecção desta circunferência com u. Esses pontos serão os centros das duas circunferências de raio $\overline{MA}$ tangentes às retas r e s que passam por P.

A Figura 8.9 ilustra os passos da construção.

Figura 8.9: Construção 8.9



8.10 Traçar uma circunferência tangente a três retas que formam dois ângulos obtusos.

Passos:

1. Considerar r, s e t retas que definem dois ângulos obtusos. Marcar o ponto B, intersecção das retas r e s, e C, intersecção das restas s e t, de modo que B e C sejam os vértices dos ângulos α e β, respectivamente. Marcar o ponto A sobre a reta r e o ponto D sobre a reta t;

2. Traçar as bissetrizes de α e β marcando E como o ponto de intersecção entre elas;

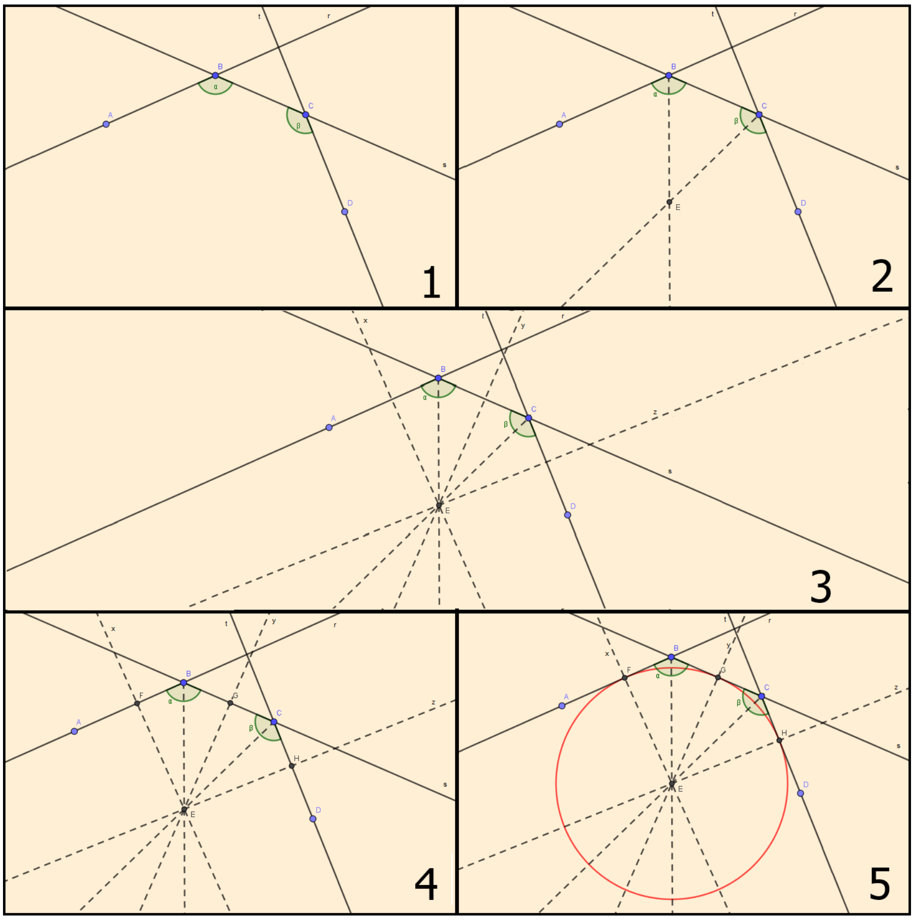
3. Traçar por E as retas x, y e z perpendiculares às retas r, s e t, respectivamente;

4. Marcar os pontos F, G e H pontos de intersecção dessas retas, respectivamente;

5. Traçar uma circunferência, centrada em E, passando pelos pontos F, G e H. Essa é a circunferência procurada.

A Figura 8.10 ilustra os passos da construção.

Figura 8.10: Construção 8.10



8.11 Dados uma circunferência de centro O, um ponto P sobre ela e um ponto A exterior, traçar uma circunferência tangente em P à circunferência dada e que passe por A.

Passos:

1. Considerar uma circunferência c com centro em O e um ponto A exterior. Traçar o segmento $\overline{AP}$;

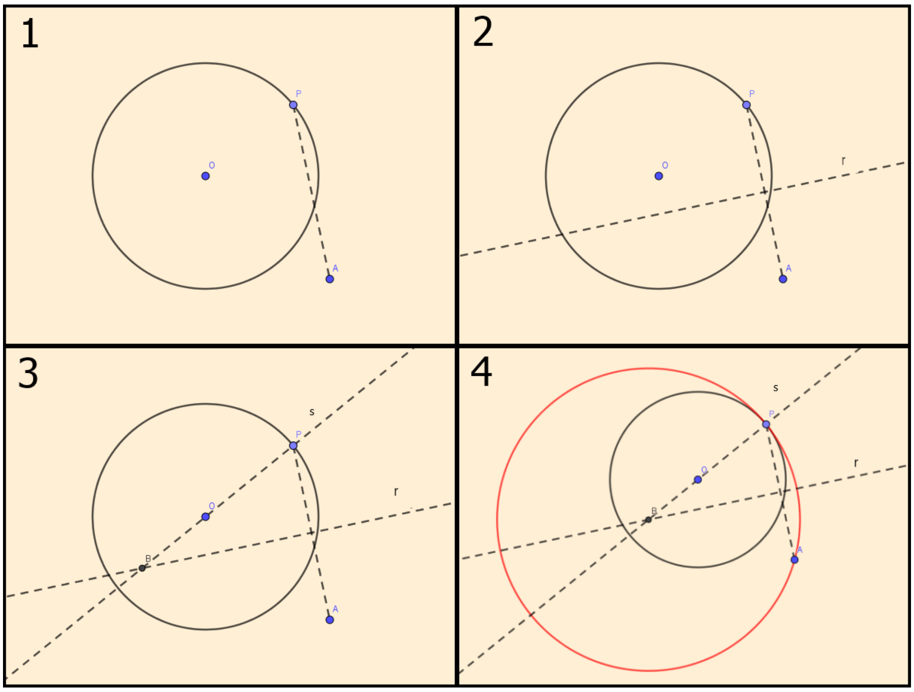
2. Determinar a mediatriz r do segmento $\overline{AP}$;

3. Traçar a reta s, de modo que ela passe pelos pontos O e P e marcar B a intersecção dessa com a reta r;

4. O ponto B é o centro da circunferência desejada que possui raio $\overline{BP}$.

A Figura 8.11 ilustra os passos da construção.

Figura 8.11: Construção 8.11



8.12 Traçar uma circunferência que seja simultaneamente tangente a outra circunferência dada no ponto C e a uma reta dada.

Passos:

1. Considerar c a circunferência dada, com centro O e o ponto C sobre ela, e uma reta r dada;

2. Traçar a reta s passando pelos pontos O e C;

3. Traçar a reta t perpendicular a reta r passando por O e marcar M ponto de intersecção da circunferência c com a reta t, de modo que M esteja no semiplano oposto a reta r em relação a reta s;

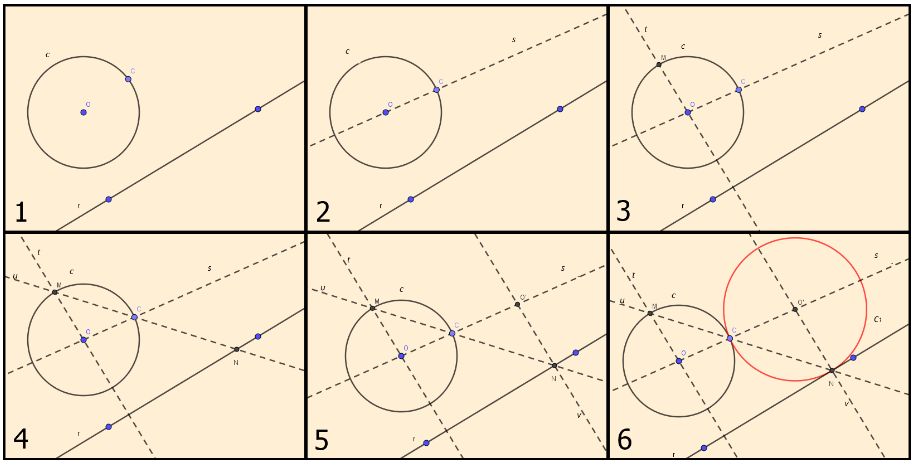
4. Traçar a reta u, passando por M e C, e marcar N ponto de intersecção das retas r e u;

5. Traçar a reta v, perpendicular à reta r, passando por N e marcar O' ponto de intersecção das retas s e v;

6. Traçar a circunferência c_1 com centro em O' passando por C. Logo, c_1 é a circunferência procurada.

A Figura 8.12 ilustra os passos da construção.

Figura 8.12: Construção 8.12



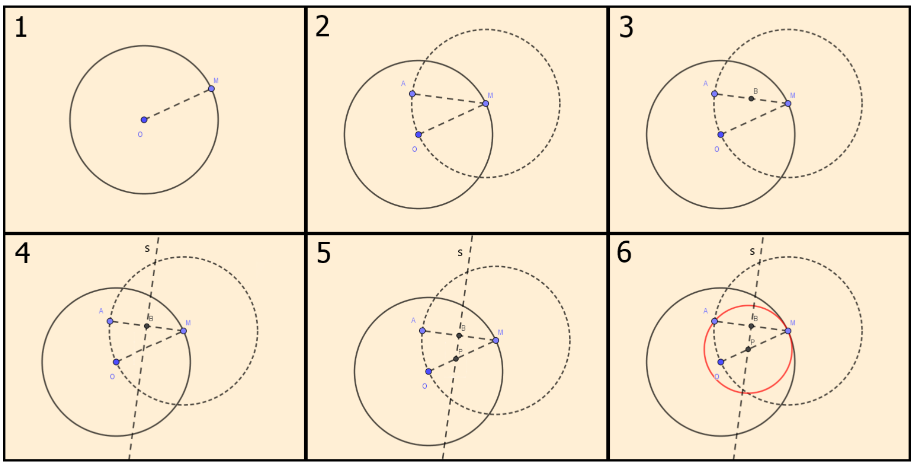
8.13 Traçar uma circunferência que seja tangente internamente a uma circunferência dada.

Passos:

1. Considerar a circunferência c de centro O e M um ponto sobre ela e, em seguida, traçar o segmento $\overline{OM}$;
2. Construir um segmento $\overline{MA}$ de medida igual ao segmento $\overline{OM}$, interno a circunferência;
3. Marcar B o ponto médio do segmento $\overline{MA}$;
4. Traçar uma reta s, passando por B, perpendicular ao segmento $\overline{AM}$;
5. Marcar o ponto P, intersecção de s com o segmento $\overline{OM}$;
6. A circunferência de centro P e raio $\overline{PM}$ é a procurada.

A Figura 8.13 ilustra os passos da construção.

Figura 8.13: Construção 8.13



8.14 Traçar duas circunferências tangentes a outras duas circunferências exteriores entre si dado um ponto de tangência.

Passos:

1. Considerar a circunferência c_1, de centro O, raio de medida l e um ponto P de tangência sobre ela e a circunferência c_2, de centro O', raio de medida l', tal que a medida de l' seja menor que a de l;

2. Traçar uma reta r passando por O e P;

3. Traçar a circunferência com centro em P e raio l'. Marcar os pontos A e B, intersecção dessa circunferência com a reta r;

4. Marcar os segmentos $\overline{O'A}$ e $\overline{O'B}$;

5. Traçar s, a mediatriz do segmento $\overline{O'A}$, e t a mediatriz do segmento $\overline{O'B}$;

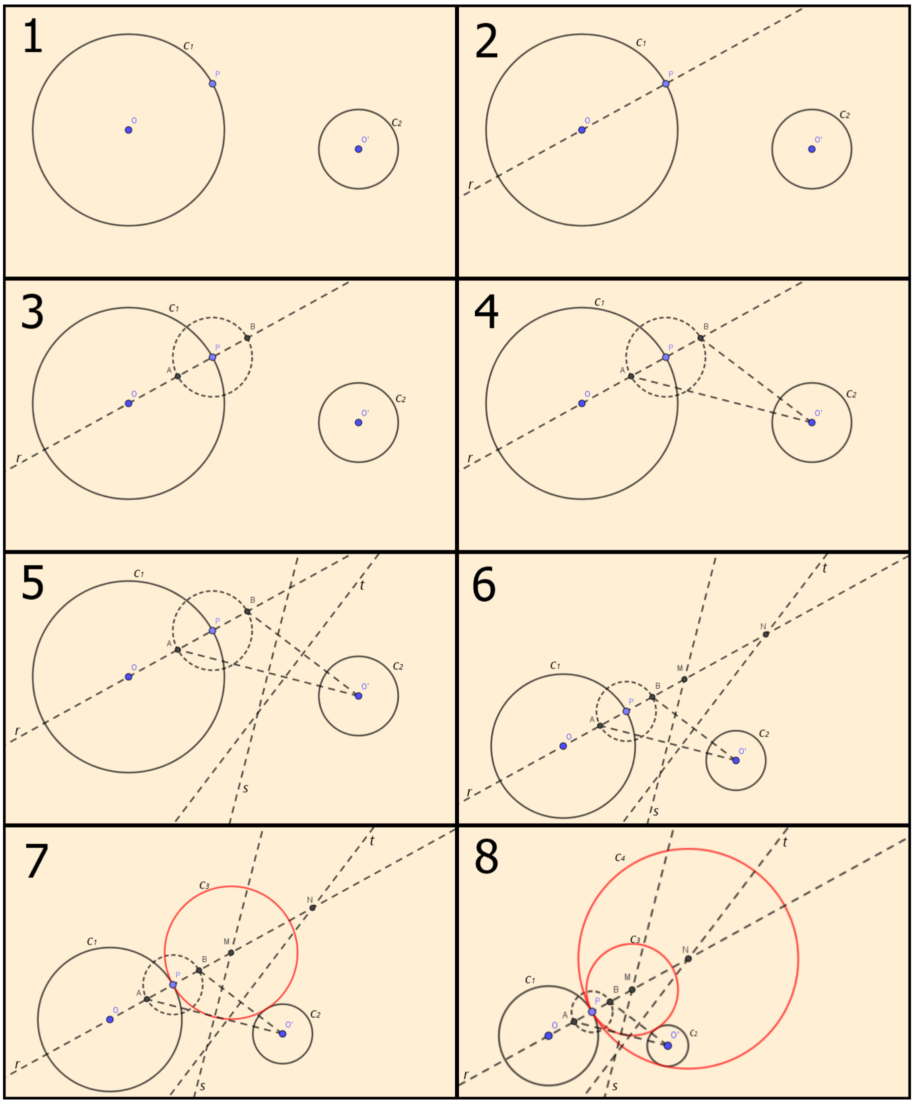
6. Marcar o ponto M, sendo ele o ponto de intersecção das retas s e r. Marcar N, o ponto de intersecção das retas t e r;

7. Traçar a circunferência c_3 centrada em M, com raio de mesma medida do segmento $\overline{MP}$;

8. Traçar a circunferência c_4 centrada em N, com raio de mesma medida do segmento $\overline{NP}$. Logo, c_3 e c_4 são as circunferências procuradas.

A Figura 8.14 ilustra os passos da construção.

Figura 8.14: Construção 8.14



8.15 Traçar retas tangentes exteriores e comuns a duas circunferências.

Passos:

1. Considerar c_1 e c_2 circunferências de centros O e O', respectivamente, cujos raios são distintos. Traçar a reta r passando pelos pontos O e O';

2. Marcar um ponto A em c_1, o qual não pertence à reta r, e traçar o segmento $\overline{OA}$;

3. Marcar B, em c_2, ponto no mesmo semiplano do ponto A determinado pela reta r, de modo que o segmento $\overline{O'B}$ seja paralelo ao segmento $\overline{OA}$;

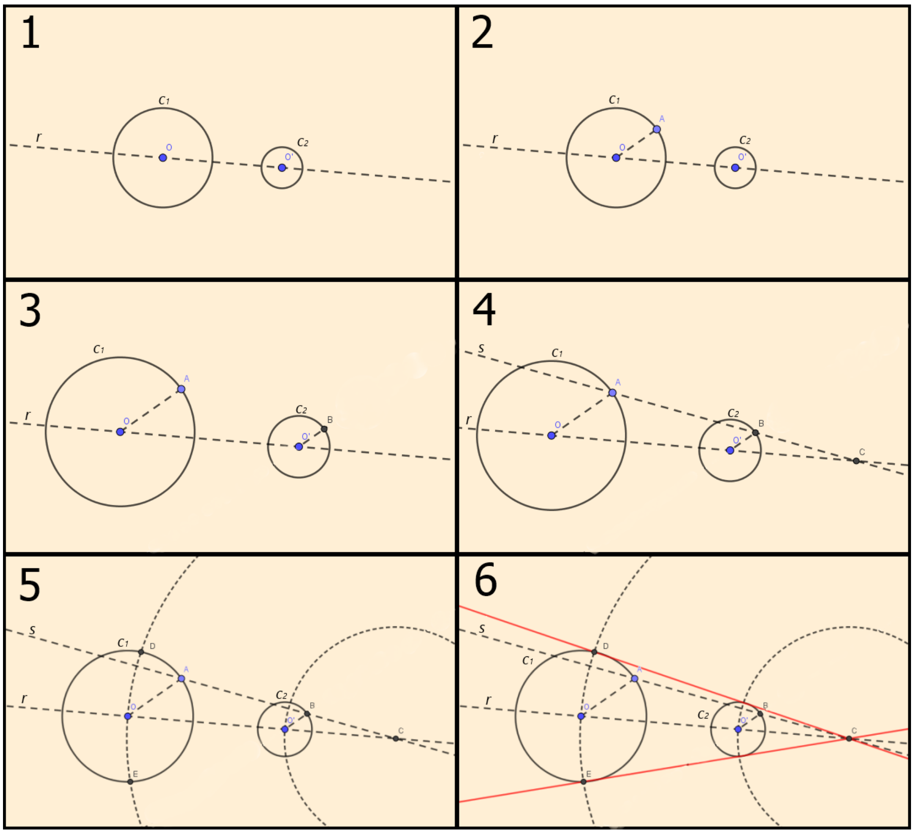
4. Traçar a reta s passando pelos pontos A e B, e marcar o ponto C a intersecção das retas r e s;

5. Determinar a circunferência com centro em C e raio $\overline{O'C}$ ou $\overline{OC}$, marcando os pontos D e E de intersecção dessa circunferência com uma das anteriores;

6. Traçar as retas definidas pelos pontos C e D, e C e E, respectivamente.

A Figura 8.15 ilustra os passos da construção.

Figura 8.15: Construção 8.15



Capítulo 9

Áreas Equivalentes

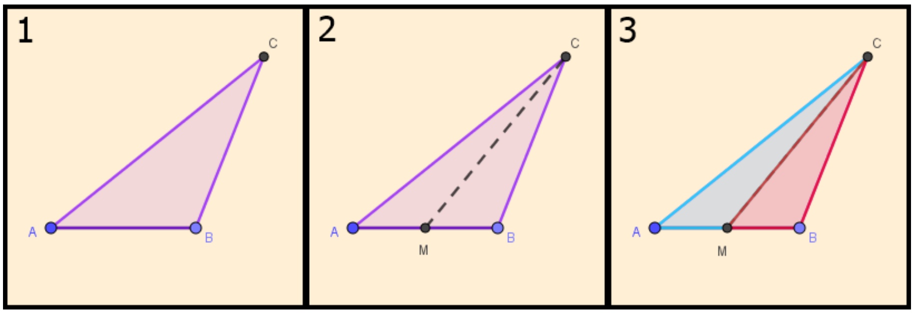
9.1 Dividir um triângulo em dois triângulos com áreas equivalentes.

Passos:

1. Considerar um triângulo ABC;
2. Considerar M o ponto médio do lado AB. Em seguida, traçar o segmento $\overline{CM}$;
3. Os triângulos AMC e BMC possuem mesma área. Tem-se assim a divisão procurada.

A Figura 9.1 ilustra os passos da construção.

Figura 9.1: Construção 9.1



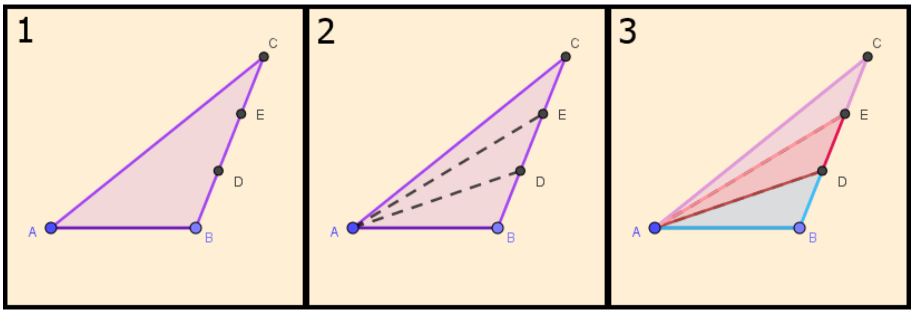
9.2 Dividir um triângulo ABC qualquer em três triângulos com áreas equivalentes.

Passos:

1. Marcar os pontos D e E sobre o lado BC de modo que as medidas do segmentos $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EC}$ sejam iguais;
2. Traçar os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$;
3. Os triângulos ABD, ADE e AEC possuem mesma área. Tem-se assim a divisão procurada.

A Figura 9.2 ilustra os passos da construção.

Figura 9.2: Construção 9.2



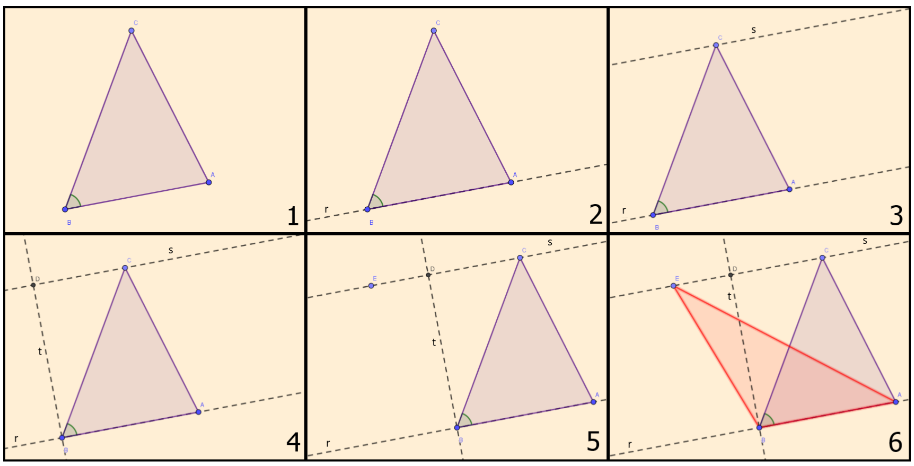
9.3 Construir um triângulo obtusângulo com área equivalente a um triângulo acutângulo dado.

Passos:

1. Considerar um triângulo acutângulo[1] ABC;
2. Traçar a reta r que passa pelo lado AB;
3. Traçar uma reta s, paralela a r, passando por C;
4. Traçar uma reta t, perpendicular a r, passando por B. A reta t intercepta s no ponto D;
5. Marcar E na reta s, de modo que o ponto D esteja entre os pontos C e E;
6. O triângulo definido pelos pontos A, B e E é o triângulo obtusângulo[2] procurado.

A Figura 9.3 ilustra os passos da construção.

Figura 9.3: Construção 9.3



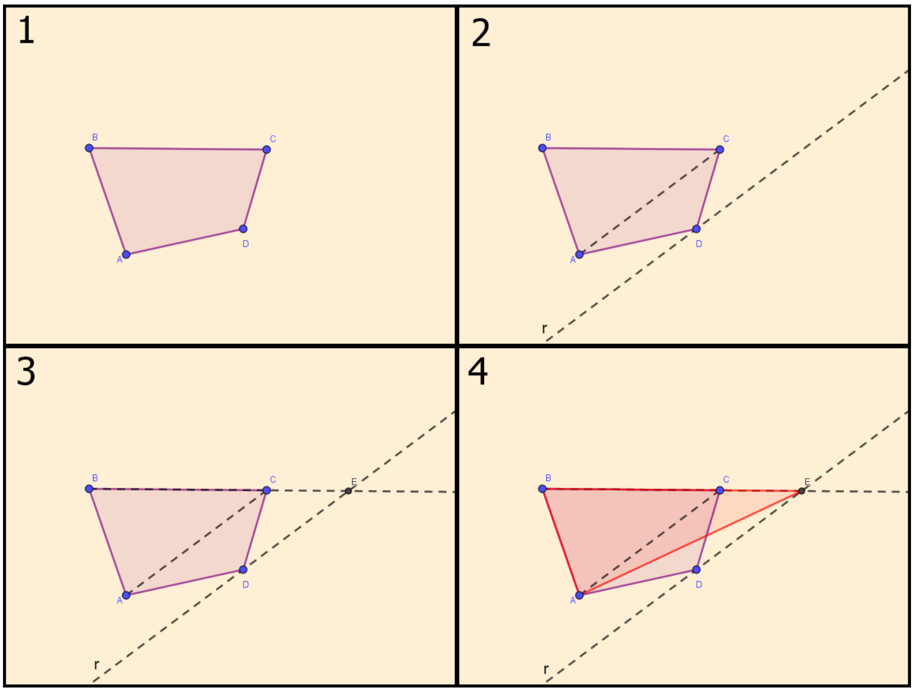
[1]Todos os ângulos internos são agudos quando as medidas dos ângulos são menores do que 90º.
[2]Um ângulo interno é obtuso, isto é, possui um ângulo com medida maior do que 90º.

9.4 Construir um triângulo de área equivalente a de um quadrilátero.

1. Considerar um quadrilátero $ABCD$ qualquer;
2. Traçar a diagonal $\overline{AC}$, e em seguida, traçar uma reta r paralela ao segmento $\overline{AC}$ passando pelo ponto D;
3. Traçar a semirreta $\overrightarrow{BC}$ que intercepta r em um ponto E;
4. O triângulo definido pelos pontos E, A e B é o procurado.

A Figura 9.4 ilustra os passos da construção.

Figura 9.4: Construção 9.4



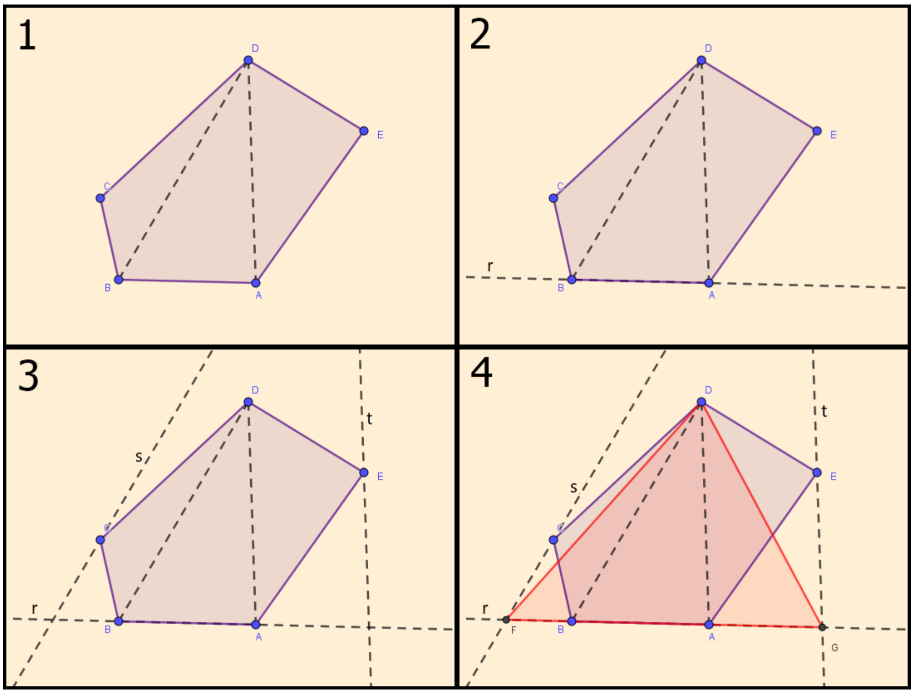
9.5 Construir um triângulo de área equivalente a um pentágono irregular.

Passos:

1. Considerar o polígono $ABCDE$. Traçar as diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$;
2. Traçar a reta r, que passa pelos pontos A e B;
3. Traçar a reta t paralela à diagonal $\overline{AD}$ passando por E, e a reta s paralela à diagonal $\overline{BD}$ passando por C;
4. Determinar os pontos F e G, intersecções da reta r com as retas s e t, respectivamente. Logo, a área do triângulo FGD é equivalente a do pentágono dado.

A Figura 9.5 ilustra os passos da construção.

Figura 9.5: Construção 9.5



9.6 Construir um triângulo de área equivalente a um hexágono regular dado.

Passos:

1. Considerar o hexágono regular $ABCDEF$ de centro O e perímetro l. Em seguida, traçar uma reta r qualquer e marcar sobre ela a medida l com extremidades I e J;

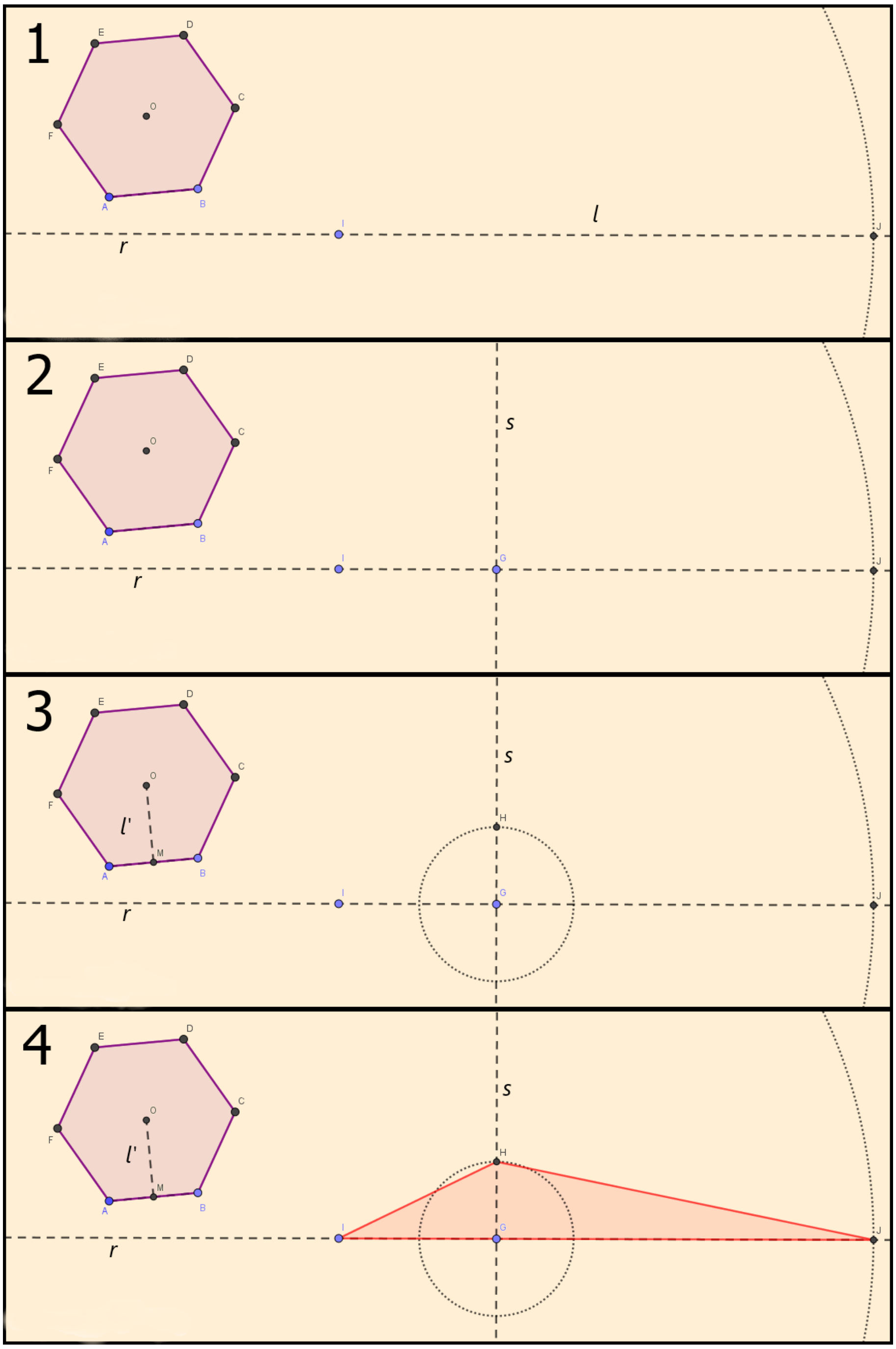
2. Marcar um ponto G qualquer em r. Por G traçar a reta s, perpendicular a r;

3. Marcar M ponto médio do lado AB. Traçar o segmento $\overline{OM}$ de medida l', esse será o apótema do hexágono dado. E marcar em s, a partir de G, a medida l'. A extremidade será o ponto H;

4. O triângulo definido pelos pontos H, I e J é o procurado.

A Figura 9.6 ilustra os passos da construção.

Figura 9.6: Construção 9.6



9.7 Construir um triângulo de área equivalente a um círculo dado.

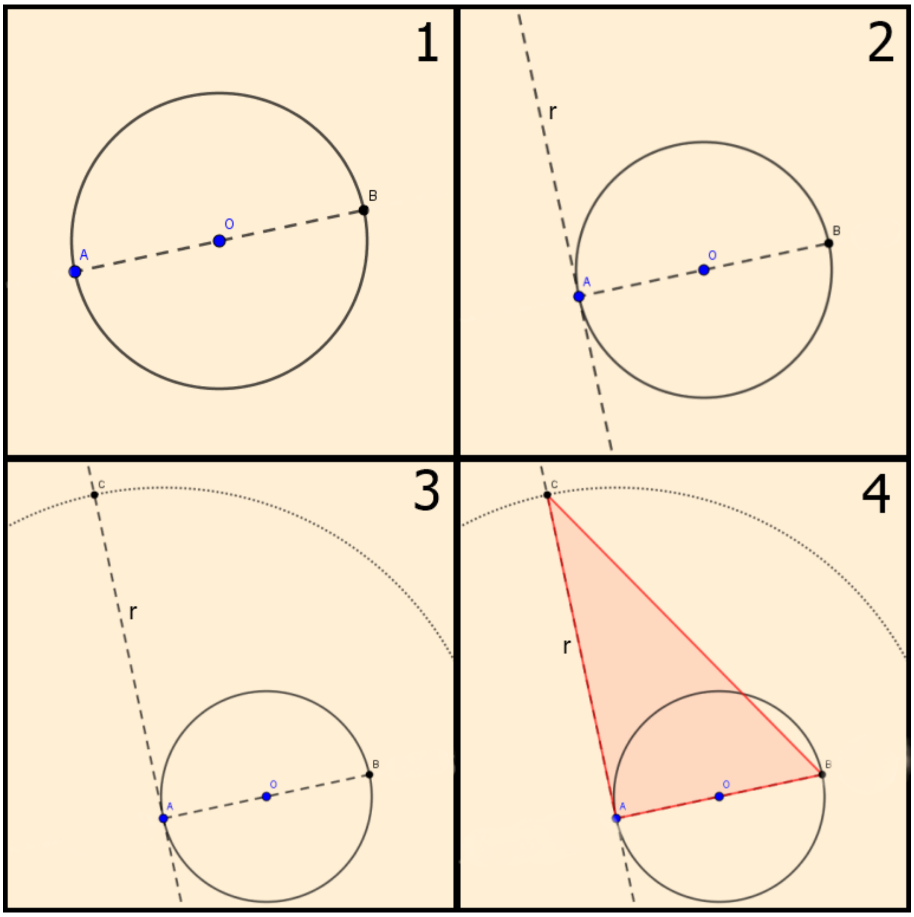
Passos:

1. Considerar uma circunferência c qualquer de centro O. E em seguida, traçar o diâmetro $\overline{AB}$ dessa circunferência;
2. Traçar pelo ponto A uma reta r perpendicular ao diâmetro $\overline{AB}$;
3. Marcar, na reta r, a medida $\overline{AC}$ igual a retificação da metade da circunferência c;

4. O triângulo definido pelos pontos A, B e C é o procurado.

A Figura 9.7 ilustra os passos da construção.

Figura 9.7: Construção 9.7



Observação: Ao retificar a circunferência c, o triângulo ABC possui área aproximada a essa circunferência.

9.8 Construir um retângulo de área equivalente a área de um círculo dado.

Passos:

1. Considerar uma circunferência qualquer de centro O, um ponto A sobre ela e traçar a reta t tangente à circunferência dada, passando pelo ponto A;
2. Determinar o segmento $\overline{BC}$ sobre a reta t tal que a medida desse seja igual ao comprimento da circunferência considerada; [3]
3. Determinar M, o ponto médio do segmento $\overline{OA}$ e traçar a reta r paralela à t passando por M;
4. Traçar as retas u e v perpendiculares a t passando por B e C, respectivamente;

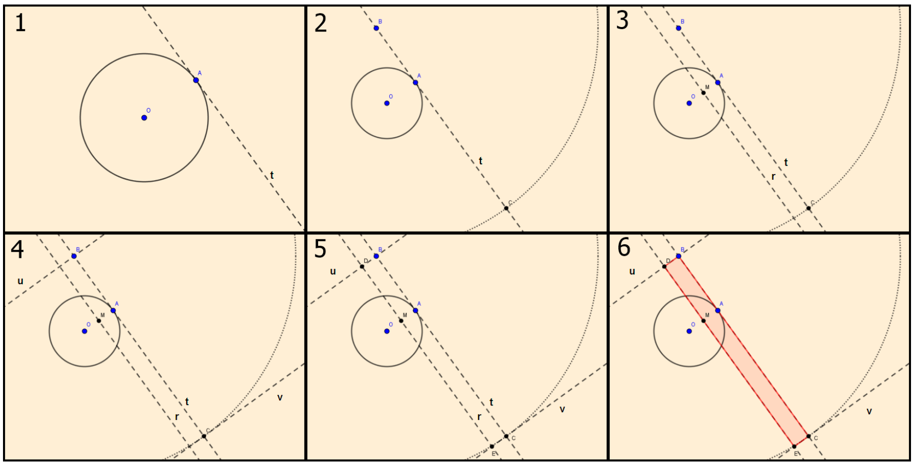
[3] Analisar construção 4.6: Retificar uma circunferência.

5. Marcar os pontos D e E, intersecções das retas u e v com a reta r, respectivamente;

6. O quadrilátero determinado pelos pontos B, D, E e C é o retângulo procurado.

A Figura 9.8 ilustra os passos da construção.

Figura 9.8: Construção 9.8



9.9 Construir um quadrado de área equivalente a de um triângulo dado.

Passos:

1. Considerar um triângulo ABC dado e prolongar o lado AC;

2. Traçar a altura $\overline{BD}$;

3. Marcar M como ponto médio de $\overline{BD}$;

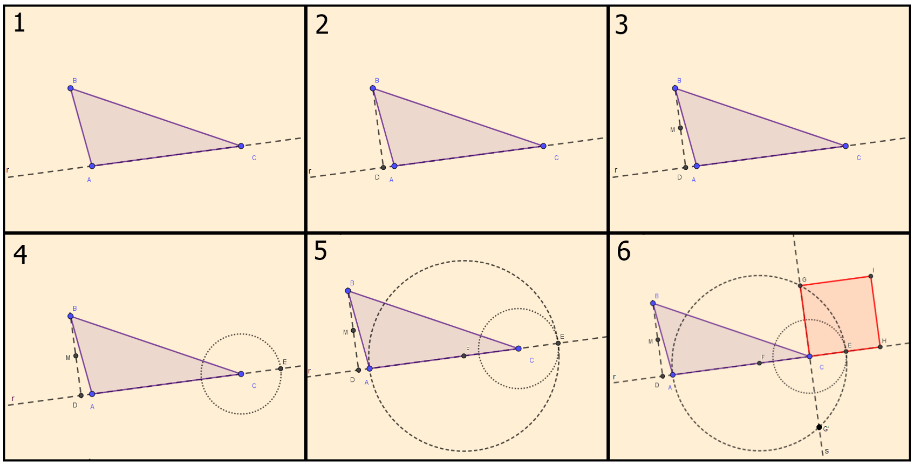
4. Marcar E no prolongamento de AC, tal que o segmento $\overline{CE}$ seja igual a medida do segmento $\overline{BM}$;

5. Marcar F ponto médio do segmento $\overline{AE}$ e traçar a circunferência de centro F e raio $\overline{EF}$;

6. Traçar a reta s perpendicular a $\overline{AE}$ passando por C e marcar G e G' intersecções de s com a circunferência de centro F e raio $\overline{EF}$. O segmento $\overline{CG}$ é o lado do quadrado procurado.

A Figura 9.9 ilustra os passos da construção.

Figura 9.9: Construção 9.9



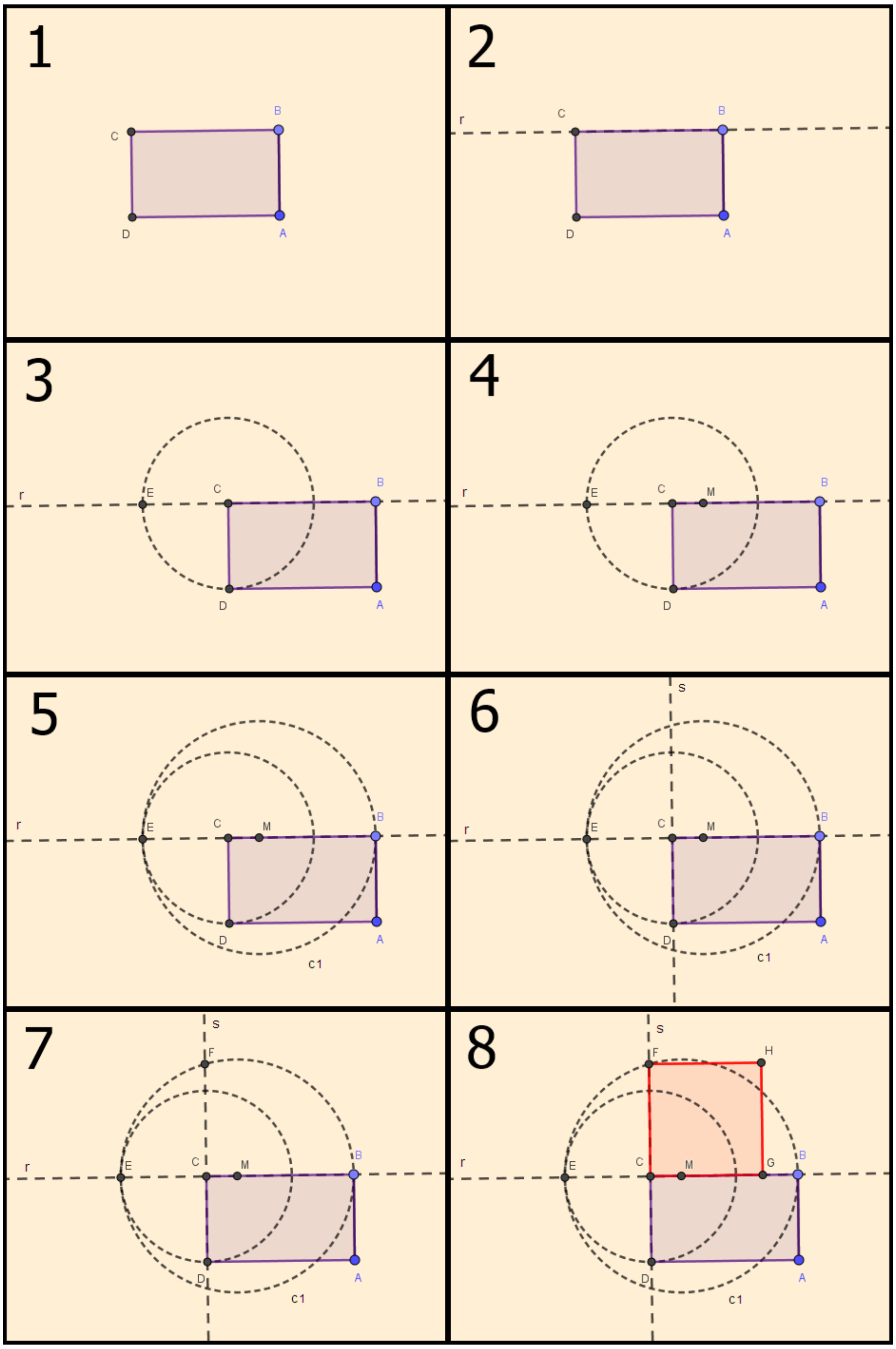
9.10 Construir um quadrado de área equivalente a de um retângulo dado.

Passos:

1. Considerar um retângulo $ABCD$ onde o segmento $\overline{BC}$ é o maior lado;
2. Traçar a reta r que passa pelo segmento $\overline{BC}$;
3. Marcar, em r, o segmento $\overline{CE}$ com a mesma medida do segmento $\overline{CD}$;
4. Marcar M ponto médio do segmento $\overline{BE}$;
5. Traçar a circunferência c_1 com centro em M e raio $\overline{ME}$;
6. Traçar a reta s que passa pelo segmento $\overline{CD}$;
7. Marcar F a intersecção de s com c_1;
8. O segmento $\overline{CF}$ é o lado do quadrado procurado.

A Figura 9.10 ilustra os passos da construção.

Figura 9.10: Construção 9.10



9.11 Construir um quadrado de área equivalente a de um paralelogramo dado.

Passos:

1. Considerar um paralelogramo $ABCD$, onde AD é o maior lado, e traçar a reta r perpendicular à AD passando por B;

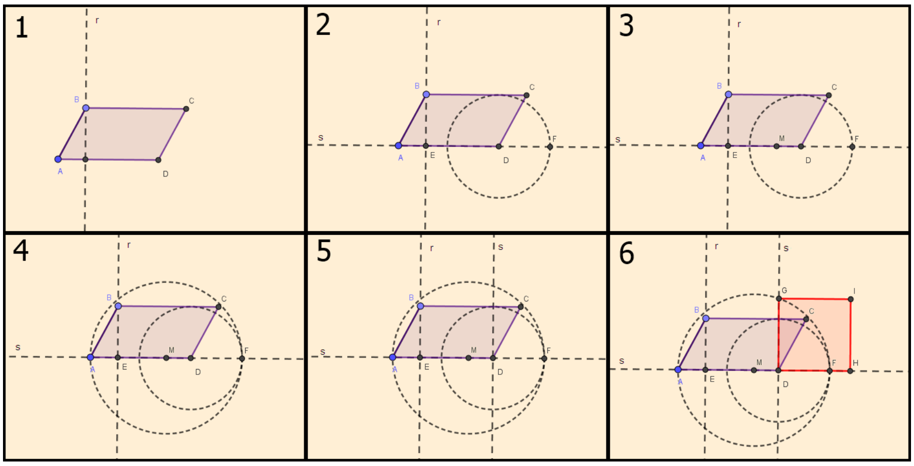
2. Marcar E o ponto de intersecção de r com AD e a partir de D, marcar F no prolongamento do lado AD tal que a medida do segmento $\overline{DF}$ seja igual a medida do segmento

$\overline{BE}$;

3. Marcar M o ponto médio do segmento $\overline{AF}$;
4. Traçar uma circunferência c com centro em M e raio $\overline{MF}$;
5. Traçar uma reta s perpendicular a $\overline{AF}$ passando por D;
6. Marcar G, ponto de intersecção da reta s com a circunferência c. O segmento $\overline{DG}$ é o lado do quadrado procurado.

A Figura 9.11 ilustra os passos da construção.

Figura 9.11: Construção 9.11



9.12 Construir um quadrado de área equivalente a de um trapézio dado.

Passos:

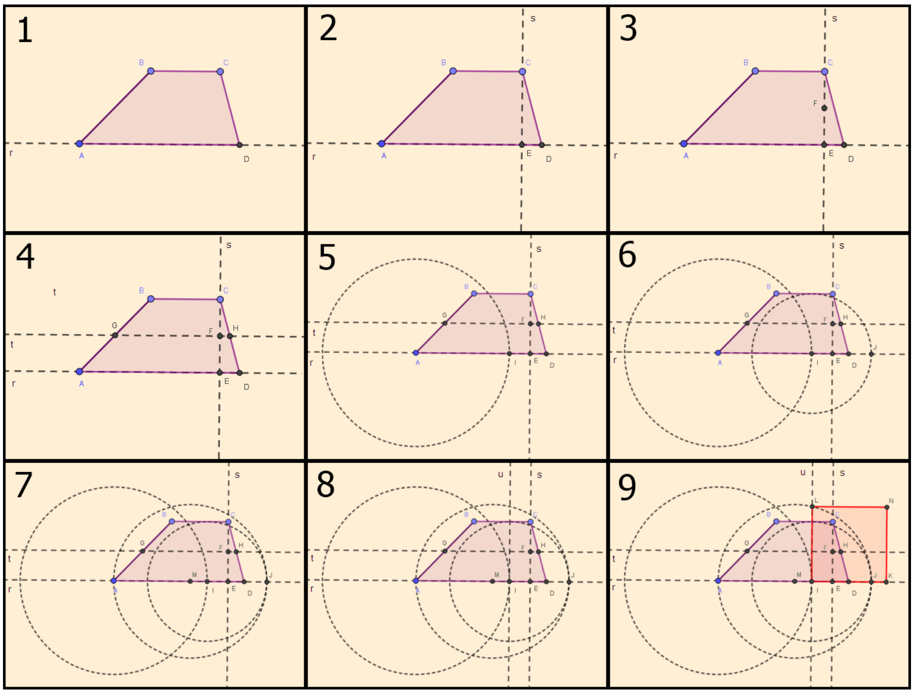
1. Considerar o trapézio $ABCD$ dado e traçar a reta r passando por $\overline{AD}$, a base maior do polígono;
2. Traçar a reta s perpendicular a r passando por C e marcar E, ponto de intersecção de r e s;
3. Marcar F, ponto médio de $\overline{CE}$;
4. Traçar a reta t paralela a r passando por F, e marcar G e H pontos de intersecção de t com o segmento $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente;
5. Traçar a circunferência de centro A e raio $\overline{GH}$ e marcar I intersecção dessa com o segmento $\overline{AD}$;
6. Traçar a circunferência de centro I e raio $\overline{CE}$ e marcar J intersecção dessa com o segmento$\overline{AD}$;
7. Marcar M o ponto médio do segmento $\overline{AJ}$ e traçar a circunferência de centro M e raio $\overline{MA}$;

8. Traçar a reta u perpendicular a r passando por I;

9. Marcar L intersecção de u com a circunferência de centro M e raio $\overline{MA}$. O segmento IL é o lado do quadrado procurado.

A Figura 9.12 ilustra os passos da construção.

Figura 9.12: Construção 9.12



9.13 Construir um quadrado de área equivalente a de um hexágono regular dado.

Passos:

1. Considerar $ABCDEF$ o hexágono regular dado, marcar o centro O desse e traçar a reta r passando por A e B. Marcar K, ponto médio do segmento $\overline{AB}$, e traçar o apótema $\overline{OK}$;

2. Traçar a circunferência com centro em B de raio $\overline{AB}$ e marcar G, ponto de intersecção dessa com r;

3. Traçar a circunferência com centro em G de raio $\overline{AB}$ e marcar H, ponto de intersecção dessa com r;

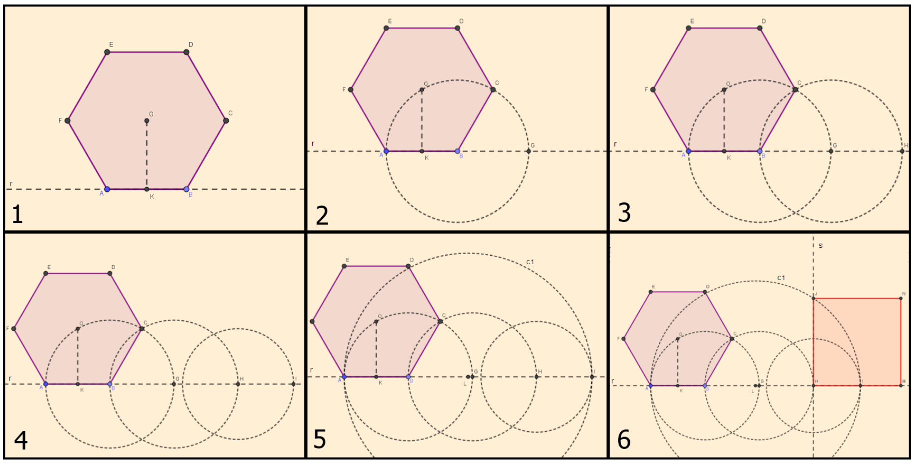
4. Traçar a circunferência com centro em H de raio $\overline{OK}$ e marcar I, ponto de intersecção dessa com r, de modo que I esteja fora da cirfunferência apresentada no passo 3;

5. Marcar L ponto médio do segmento $\overline{AI}$ e traçar a circunferência c_1 de raio $\overline{AL}$ com centro em L;

6. Traçar a reta s perpendicular a r passando por H e marcar J ou J', pontos de intersecção dessa com c_1. O segmento $\overline{HJ}$ é o lado do quadrado procurado.

A Figura 9.13 ilustra os passos da construção.

Figura 9.13: Construção 9.13



9.14 Dividir um quadrilátero dado em duas áreas equivalentes por um vértice estabelecido.

Passos:

1. Considerar $ABCD$ o quadrilátero dado, D o vértice estabelecido;

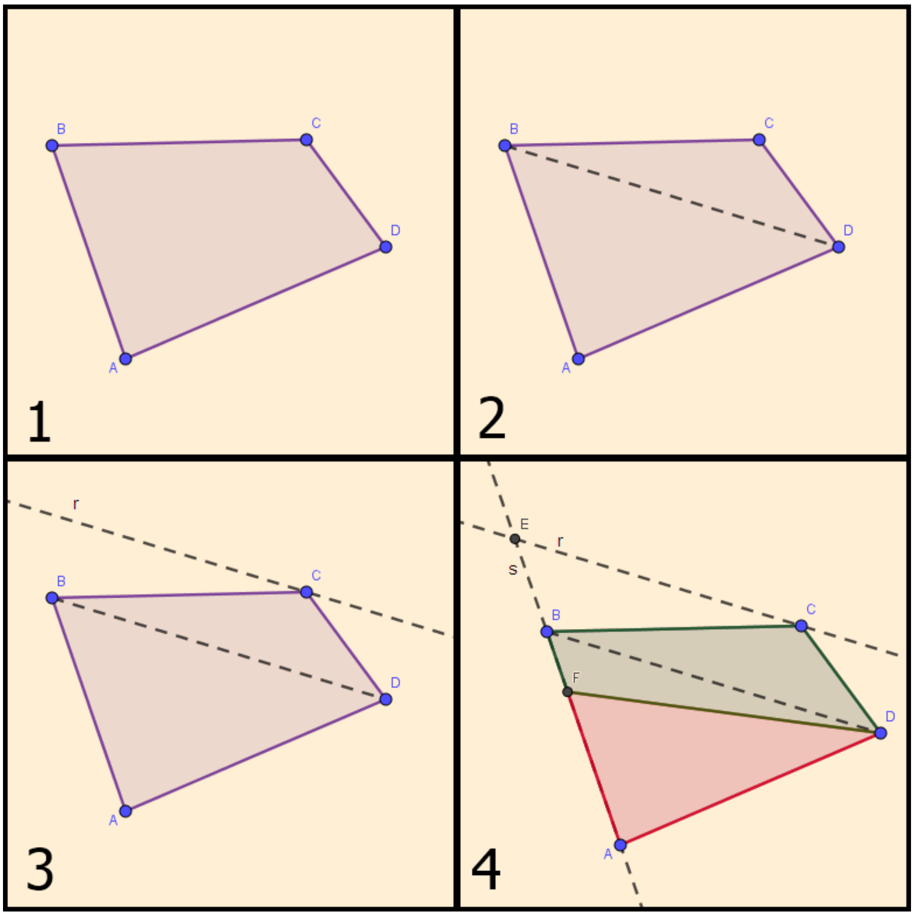
2. Traçar a diagonal $\overline{BD}$;

3. Traçar a reta r paralela à $\overline{BD}$ passando por C;

4. Traçar a reta s passando por A e B, marcar E, intersecção de r e s, e marcar F, ponto médio do segmento $\overline{AE}$. O segmento $\overline{DF}$ representa a divisão procurada.

A Figura 9.14 ilustra os passos da construção.

Figura 9.14: Construção 9.14



9.15 Sendo dado um quadrado, construir outro cuja área seja equivalente à metade do quadrado dado.

Passos:

1. Considerar $ABCD$ o quadrado dado e marcar E ponto de encontro das diagonais;

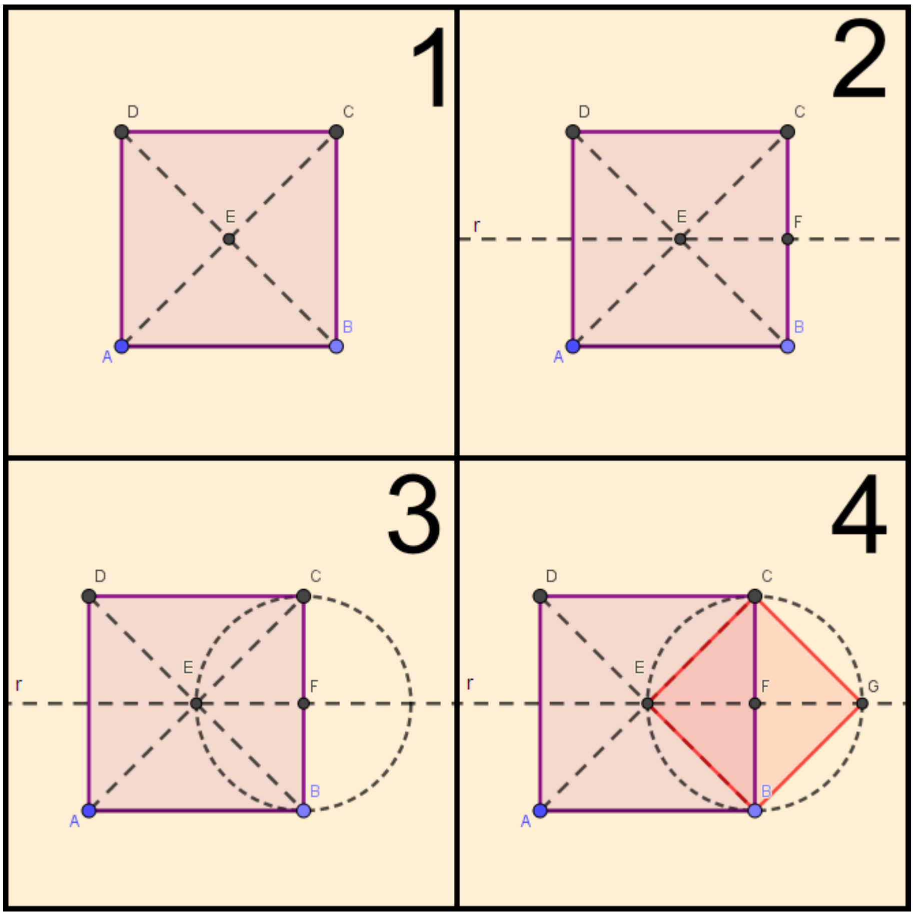
2. Traçar a reta r perpendicular ao segmento $\overline{BC}$ passando por E e marcar F ponto de intersecção de r com $\overline{BC}$;

3. Traçar a circunferência de centro F e raio $\overline{EF}$;

4. Marcar o ponto G em r, de modo que o segmento $\overline{EF}$ seja igual a medida do segmento $\overline{FG}$. Os pontos E, B, G e C determinam o quadrado procurado.

A Figura 9.15 ilustra os passos da construção.

Figura 9.15: Construção 9.15



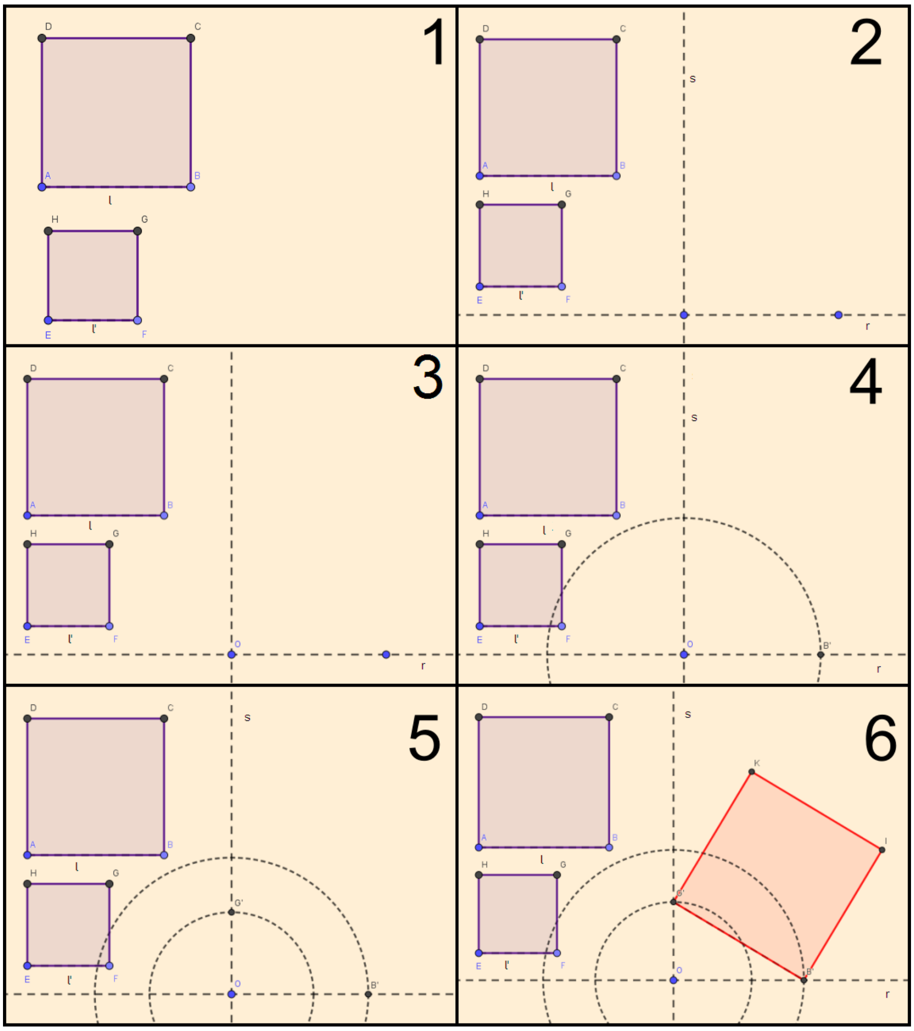
9.16 Construir um quadrado de área equivalente à soma da área de dois outros quadrados dados.

Passos:

1. Considerar os quadrados $ABCD$ e $EFGH$, em que o segmento $\overline{AB}$ possui medida l e o segmento $\overline{EF}$ tem medida l', sendo l maior que l';
2. Traçar duas retas r e s, perpendiculares entre si;
3. Marcar O, intersecção de r e s;
4. Traçar o segmento $\overline{OB'}$, de medida igual a l, sobre r;
5. Traçar o segmento $\overline{OG'}$, de medida igual a l', sobre s;
6. Traçar o segmento $\overline{B'G'}$, que é a medida do lado do quadrado procurado.

A Figura 9.16 ilustra os passos da construção.

Figura 9.16: Construção 9.16



9.17 Construir um quadrado cuja a área seja igual a diferença das áreas de dois outros quadrados dados.

Passos:

1. Considerar os quadrados $ABCD$ e $EFGH$, tal que o lado AB seja maior que o lado EF;

2. Traçar uma reta r e marcar um ponto I sobre ela;

3. Traçar uma perpendicular a r, passando por I;

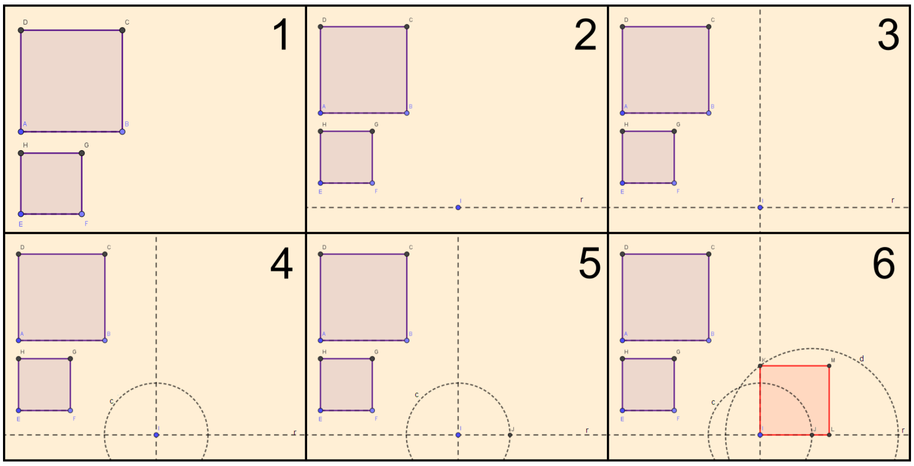
4. Traçar uma circunferência c de raio $\overline{EF}$ com centro em I;

5. Marcar J um dos pontos de intersecção com a reta r;

6. Traçar uma circunferência d, com o centro em J, de raio $\overline{AB}$ e marcar K, um dos pontos de intersecção entre a circunferência d e a reta s. O segmento $\overline{IK}$ é o lado do quadrado procurado.

A Figura 9.17 ilustra os passos da construção.

Figura 9.17: Construção 9.17



9.18 Construir um retângulo de área equivalente a de um triângulo dado.

Passos:

1. Considerar AGB o triângulo dado;

2. Traçar r, reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, passando por G;

3. Traçar s, reta perpendicular à r, que passa pelos pontos A e B. Marcar E sendo a intersecção de r com a reta s;

4. Marcar M, o ponto médio do segmento $\overline{GE}$;

5. Traçar t, reta paralela ao segmento $\overline{AB}$, passando por M;

6. Traçar u, reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, passando por A;

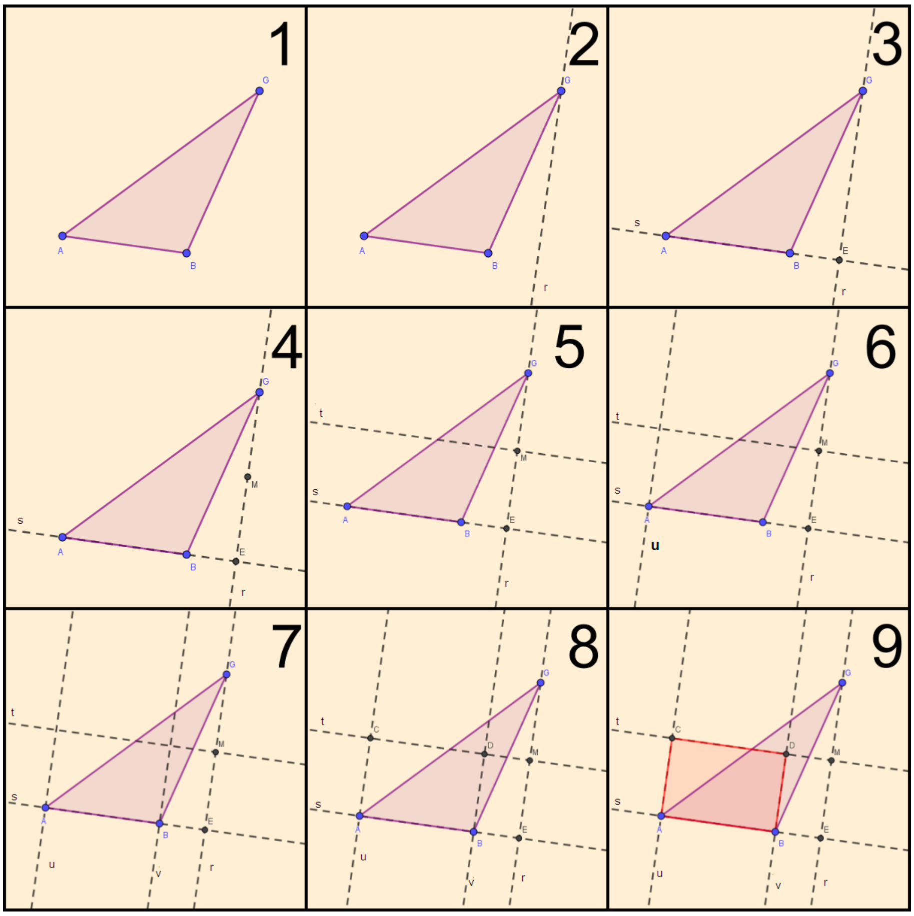
7. Traçar v, reta perpendicular aosegmento $\overline{AB}$, passando por B;

8. Marcar o ponto C da intersecção de t com u e marcar o ponto D da intersecção de t com v;

9. Unindo os pontos A, B, C e D, temos o retângulo procurado.

A Figura 9.18 ilustra os passos da construção.

Figura 9.18: Construção 9.18



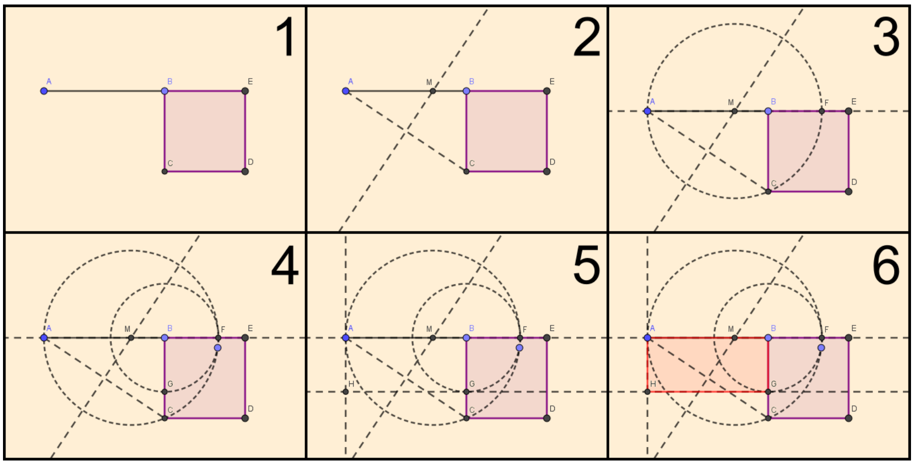
9.19 Dados um segmento $\overline{AB}$ e um quadrado $BCDE$, construir sobre $\overline{AB}$ um retângulo equivalente a $BCDE$.

Passos:

1. Considerar um segmento $\overline{AB}$ e um quadrado $BCDE$;
2. Traçar o segmento $\overline{AC}$. Traçar a mediatriz do segmento $\overline{AC}$ e determinar o ponto M, intersecção dessa com o segmento $\overline{AB}$;
3. Traçar uma circunferência com centro M e raio $\overline{MA}$ interceptando o prolongamento do segmento $\overline{AB}$ em um ponto F;
4. Traçar uma circunferência com centro B e raio $\overline{BF}$ interceptando $\overline{BC}$ em um ponto G;
5. Traçar por G uma reta paralela ao segmento $\overline{AB}$ e, por A, uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, que se interceptam em um ponto H;
6. Os pontos A, B, G e H determinam o retângulo procurado.

A Figura 9.19 ilustra os passos da construção.

Figura 9.19: Construção 9.19



9.20 Dado um retângulo $ABCD$, construir outro tal que sua área seja o dobro da área de $ABCD$.

Passos:

1. Considerar o retângulo $ABCD$. Traçar as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, e construir um quadrado $ABEF$;

2. Traçar as semirretas $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{AC}$;

3. Construir uma circunferência de centro A e raio $\overline{AE}$;

4. Marcar G, o ponto de intersecção da circunferência com a semirreta $\overrightarrow{AB}$;

5. Construir uma perpendicular a $\overrightarrow{AB}$, passando por G, que intercepta a semirreta $\overrightarrow{AC}$ em um ponto H;

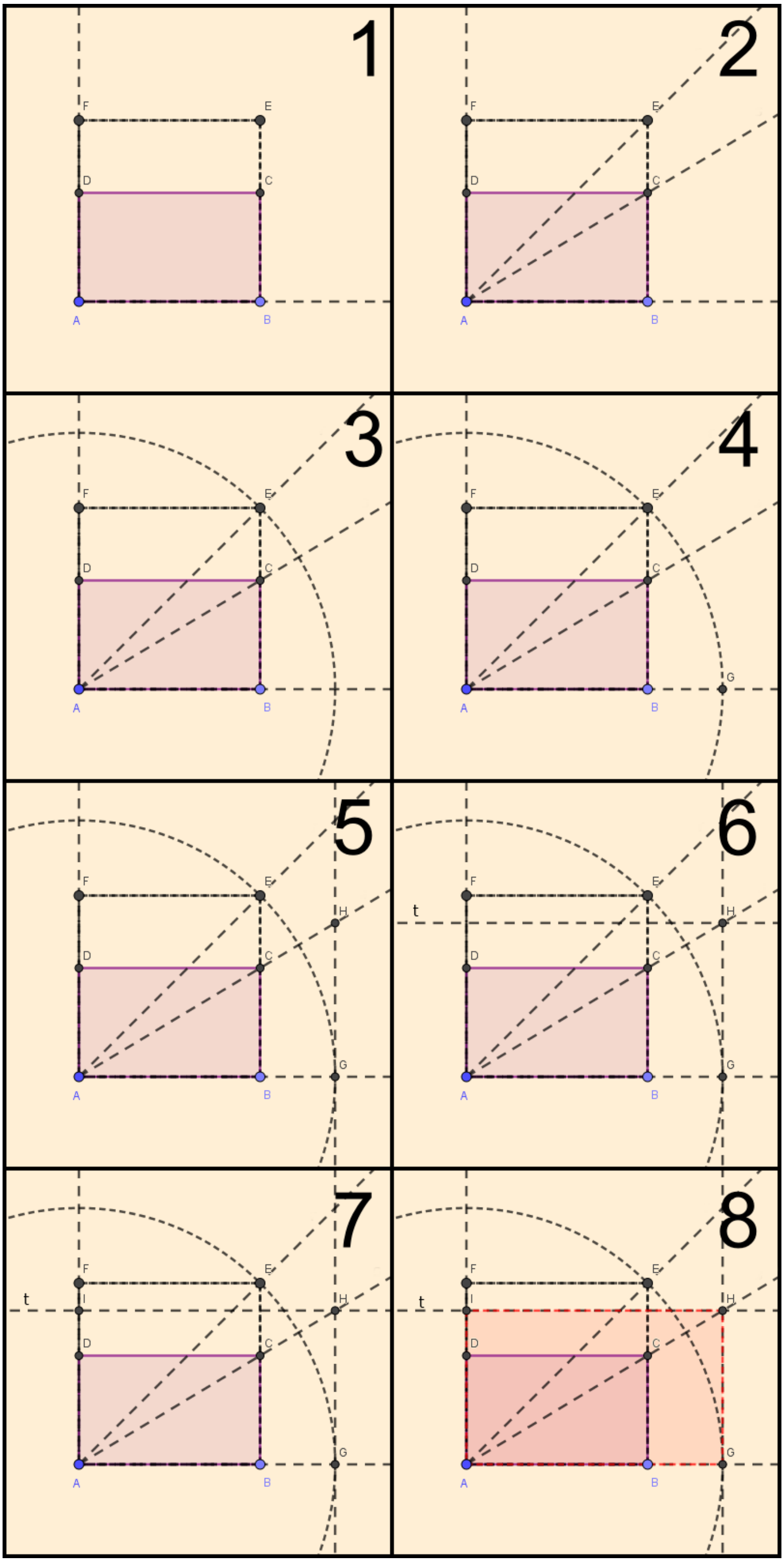
6. Construir uma reta t paralela ao segmento $\overline{AB}$ passando por H;

7. Marcar I, o ponto de intersecção de t com $\overrightarrow{AD}$;

8. Os pontos A, G, H e I determinam o retângulo procurado.

A Figura 9.20 ilustra os passos da construção.

Figura 9.20: Construção 9.20



9.21 Construir uma circunferência, cujo comprimento seja a metade do comprimento de uma circunferência dada.

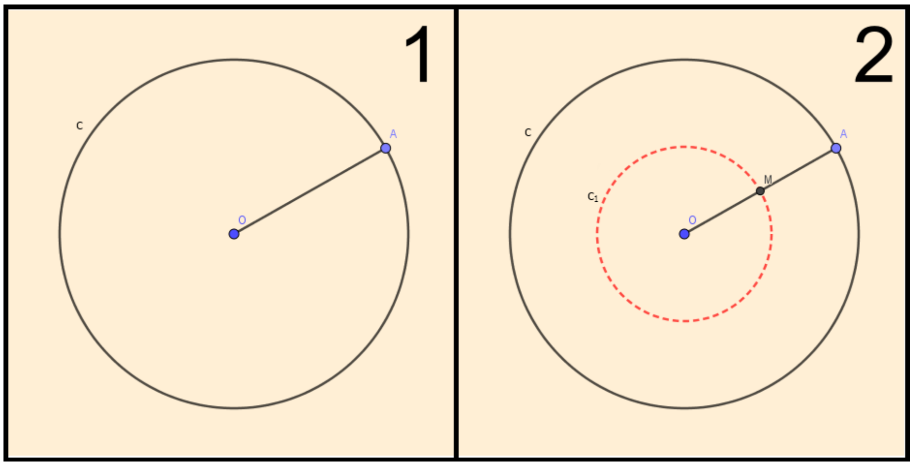
Passos:

1. Considerar c a circunferência de centro O e raio $\overline{OA}$;

2. Marcar M, o ponto médio do segmento $\overline{OA}$. Traçar c_1, a circunferência de centro O e raio $\overline{OM}$. Essa é a circunferência procurada.

A Figura 9.21 ilustra os passos da construção.

Figura 9.21: Construção 9.21



9.22 Construir círculos cujas áreas sejam $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,... de um círculo dado.

Passos:

1. Considerar um círculo c de centro O. Determinar dois pontos, A e B, em c, de modo que os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ sejam perpendiculares entre si;

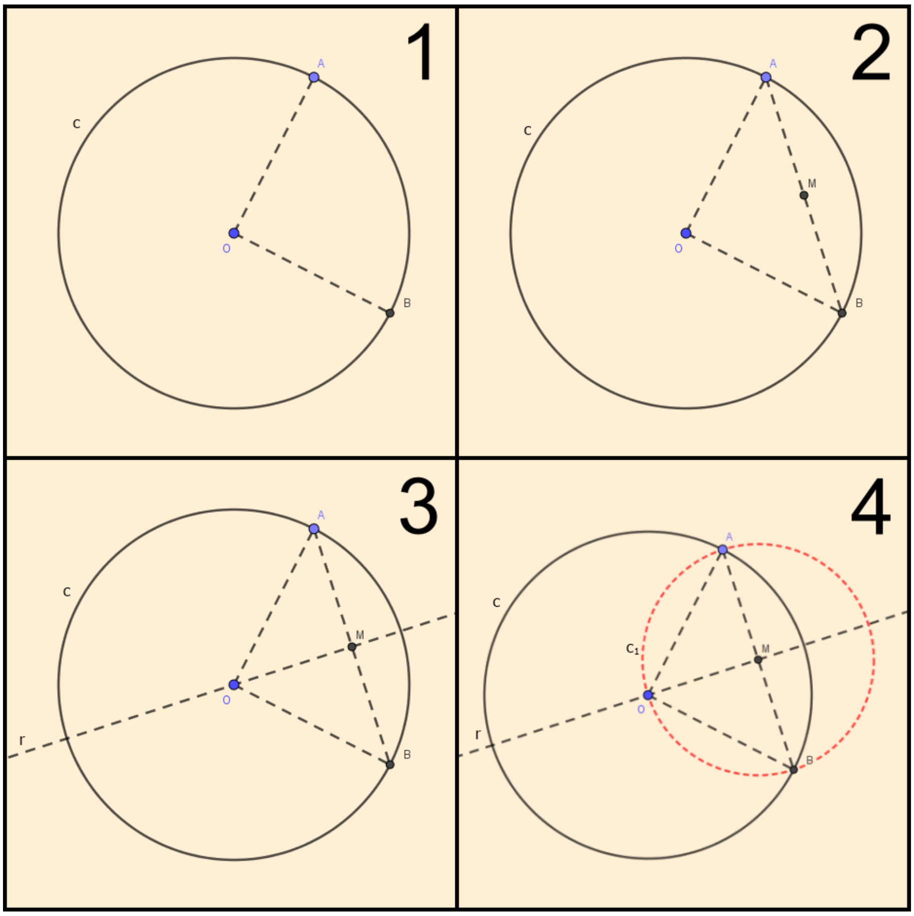
2. Traçar o segmento $\overline{AB}$ e determinar M seu ponto médio;

3. Traçar a reta r, passando por M e O;

4. Determinar o círculo c_1 centrado em M e raio $\overline{MA}$. A área desse círculo é equivalente à metade da área de c. A partir de c_1, repetir o mesmo processo para encontrar os demais círculos procurados.

A Figura 9.22 ilustra os passos da construção.

Figura 9.22: Construção 9.22



9.23 Construir círculos cujas áreas sejam o dobro de outro círculo dado.

Passos:

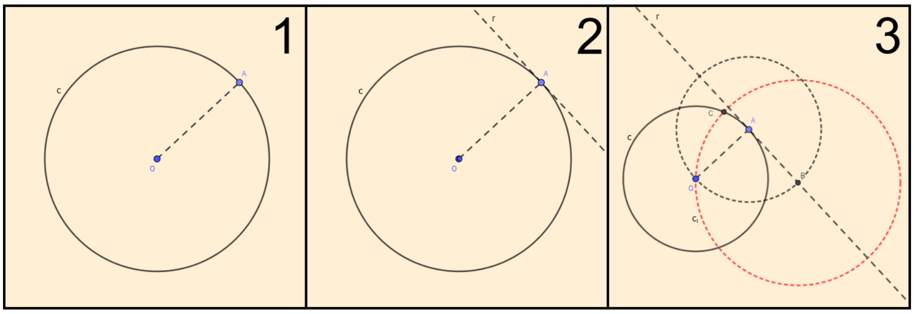
1. Considerar o círculo c de centro O. Determinar A, ponto qualquer em c, e traçar o segmento $\overline{OA}$;

2. Traçar, por A, a reta r perpendicular ao segmento $\overline{OA}$;

3. Determinar o círculo centrado em A e raio $\overline{OA}$. Marcar B, uma de suas intersecções com r. Traçar o círculo c_1, centrado em B e raio $\overline{OB}$, esse tem área igual ao dobro da área de c.

A Figura 9.23 ilustra os passos da construção.

Figura 9.23: Construção 9.23



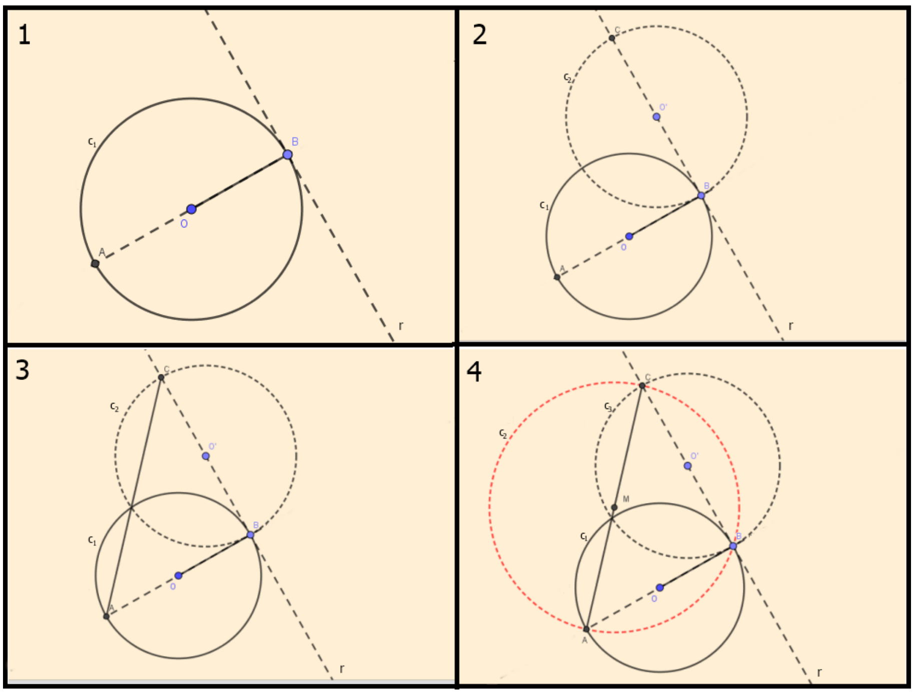
9.24 Construir um círculo cuja área seja equivalente a soma das áreas de dois círculos.

Passos:

1. Considerar o círculo c_1 de centro O e raio $\overline{OB}$. Traçar o diâmetro $\overline{AB}$ e, por B, traçar uma reta r tangente ao círculo c_1;
2. Marcar O', um ponto qualquer em r. Traçar o círculo c_2, com centro em O' e raio $\overline{O'B}$, e traçar o diâmetro $\overline{CB}$;
3. Traçar o segmento $\overline{AC}$;
4. Marcar M, o ponto médio do segmento $\overline{AC}$. Traçar o círculo c_3 de centro M e raio $\overline{MA}$. Esse é o círculo procurado.

A Figura 9.24 ilustra os passos da construção.

Figura 9.24: Construção 9.24



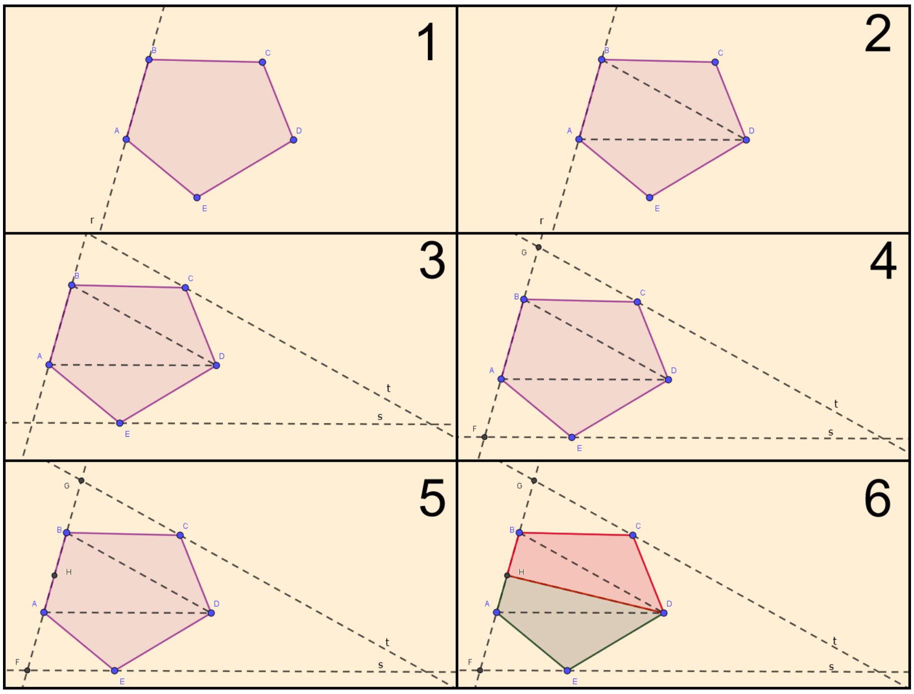
9.25 Dividir um pentágono irregular em duas regiões com áreas equivalentes.

Passos:

1. Considerar o pentágono $ABCDE$ e traçar uma reta r passando por A e B;
2. Traçar os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$;
3. Traçar a reta s, paralela ao ,,0,segmento $\overline{AD}$, passando por E e a reta t, paralela ao segmento $\overline{BD}$, passando por C;
4. Marcar F e G, pontos de intersecção das retas s e t com r, rescpectivamente;
5. Marcar H, ponto médio do segmento $\overline{FG}$;
6. Traçar o segmento $\overline{DH}$. Esse determina a divisão procurada.

A Figura 9.25 ilustra os passos da construção.

Figura 9.25: Construção 9.25



Referências bibliográficas

[1] BRAGA, Theodoro. Desenho Geométrico Linear: problemas de desenho linear geométrico. 14. ed. São Paulo: Ícone, 1997.

[2] GEOGEBRA. Site oficial do software. Disponível em: www.geogebra.org. Acesso em: fev. 2020.