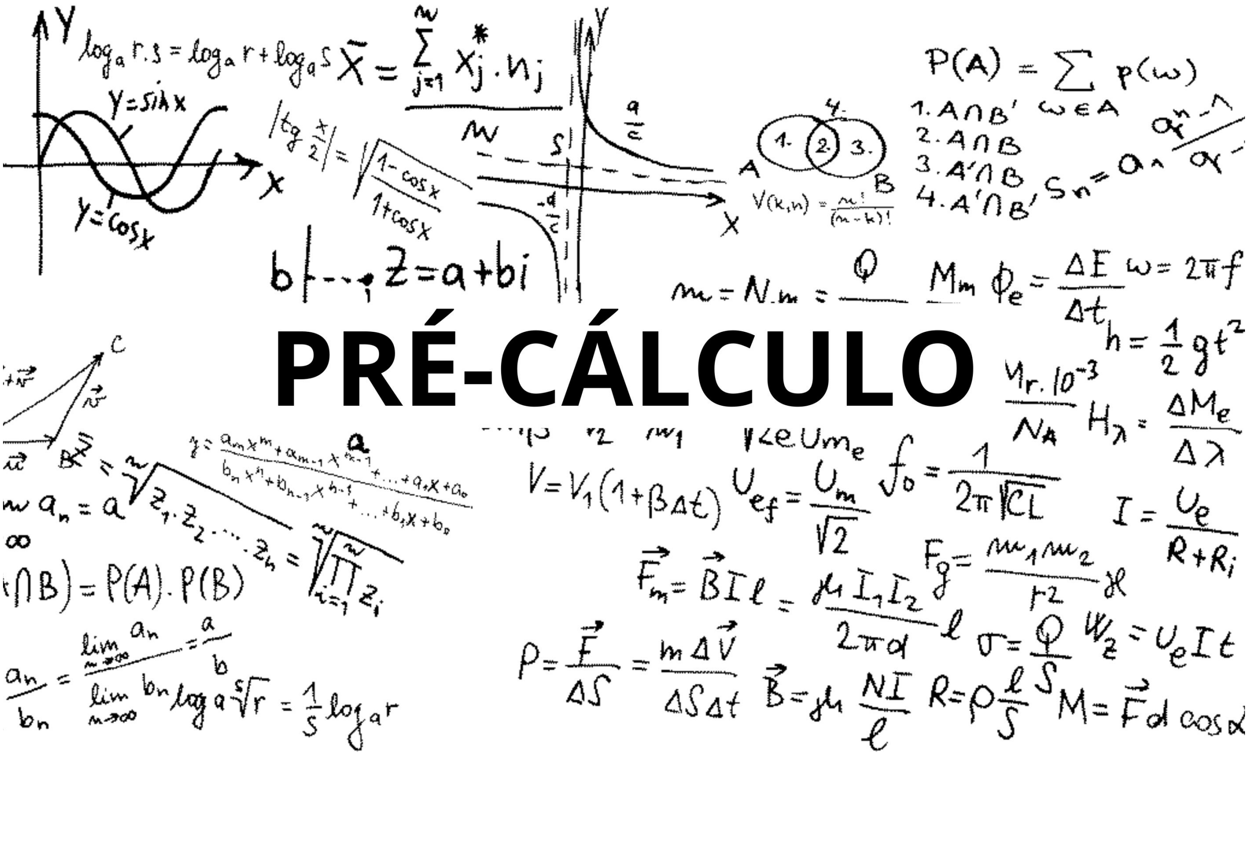
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA - RS
GRUPO PET MATEMÁTICA DA UFSM



PRÉ-CÁLCULO

Elaborado e revisado por:

Ana Paula Stefanello
Camila Silva de Lima
Camila Taís Schuh
Carlos Daniel Raminelli
Emilly Rigue
Enzo Massaki Ito
Gabriel Neves da Silva
Gustavo Streppel de Oliveira
Inês Farias Ferreira
Isadora Roth
Luísi Emanuelly Silveira do Nascimento
Mário Henrique Soriano Rosa
Paola Nascimento Brum
Viviane Lopes Garcia

PET Matemática - UFSM

Apresentação

A área de Matemática, principalmente a disciplina de Cálculo, é recorrente nos mais variados cursos de graduação, tanto da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), quanto das demais instituições brasileiras. Além disso, muitos alunos do Ensino Superior demonstram dificuldade com relação a Matemática, o que se confirma no fato de haver um número significativo de reprovações em disciplinas matemáticas de início de curso, gerando, muitas vezes, um alto índice de evasão. De encontro a isso, surgiu a proposta do Grupo PET Matemática da UFSM em ofertar um minicurso de Pré-Cálculo destinado aos calouros da UFSM, particularmente os ingressantes nos cursos de Matemática. Dessa maneira, optou-se pela produção de um material didático que pudesse apresentar conceitos/conteúdos vistos na Educação Básica e que pudesse servir como ferramenta de apoio a inúmeras disciplinas específicas de cunho matemático. Entre os assuntos abordados estão frações, teoria de conjuntos, potências, raízes, equações, inequações e funções. A estrutura básica apresentada neste material provém da referência Wagner (2011), intitulada "Matemática 1" da coleção Universitária, editora FGV. No entanto, outras referências foram utilizadas, seja para compor a teoria apresentada sucintamente ou na indicação de exercícios propostos. Espera-se que materiais bibliográficos dessa natureza, produzidos pelo grupo PET Matemática, possam contribuir na formação inicial de acadêmicos de diferentes cursos que vierem a ter acesso aos mesmos. A apostila foi compilada com o intuito de diminuir lacunas existentes na etapa de transição entre a Educação Básica e Ensino Superior e, dessa forma, auxiliar na diminuição da evasão em disciplinas iniciais de cursos que tenham a matemática como área de conhecimento incluída em sua grade curricular. Outras iniciativas dessa natureza que resultaram em materiais bibliográficos estão disponíveis no site oficial do grupo.

Santa Maria, Março de 2020.
Grupo PET Matemática - UFSM

Sumário

Capítulo 1

Conjuntos

Um conjunto é algo que possui objetos dentro de si. Esses objetos são chamados de elementos do conjunto. Atualmente, grande parte da matemática é organizada por meio de conjuntos. Um exemplo de aplicação a uma situação de senso comum é em um grupo de 30 pessoas, 15 comem chocolate, 10 caramelo, 9 chocolate e caramelo e 14 calda de morango. Essa situação pode ser interpretada e analisada por meio dos conjuntos.

1.1 Representação dos conjuntos

A primeira forma de representar um conjunto é exibir seus elementos. O nome do conjunto é indicado por uma letra maiúscula e seus elementos estão dentro de chaves. Observamos a representação:

$$A = \{8, z, \epsilon, \clubsuit, \blacksquare\}$$

O conjunto A possui cinco elementos. Não existe ordem alguma entre os elementos de um conjunto. Assim, $\{\epsilon, \blacksquare, z, 8, \clubsuit,\}$ é o mesmo conjunto A citado acima. Além disso, cada elemento de um conjunto é um objeto distinto de todos os outros elementos desse conjunto. Portanto, $\{a, a, b, b, b, c, d, d\}$ é exatamente igual a $\{a, b, c, d\}$.
Algumas vezes, os elementos de um conjunto possuem alguma relação. Imagine, por exemplo, o conjunto V das vogais de nosso alfabeto, temos assim:

$$V = \{a, e, i, o, u\}.$$

Outra forma de representar esse conjunto é dar a regra que define seus elementos. Isso é feito da seguinte maneira:

$$V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}$$

lê - se "V é o conjunto dos elementos x tais que x é uma vogal".

Quando os elementos de um conjunto formam uma sequência para a qual existe uma regra que os define, então podemos usar as duas maneiras principais de representação. Imagine o conjunto P dos números pares de dois algarismos, como se trata de uma sequência conhecida, uma forma de representarmos esse conjunto é escrever alguns elementos para que a regra de construção dos demais fique implícita, observe:

$$P = \{10, 12, 14, ..., 98\}$$

Outra maneira de descrevermos elementos desse conjunto:

$$P = \{x \mid x \textit{ é par e } 10 \leq x \leq 98\}$$

Quando usamos as reticências dentro de um conjunto como no exemplo a seguir $A = \{1, 2, 3, ..., 8, 9, 10\}$, elas significam que o padrão se mantém, ou seja, o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Exercícios Resolvidos:

1. Dê os elementos dos seguintes conjuntos:

   a) $A = \{x \mid x \textit{ é letra da palavra conjunto}\}$

   b) $B = \{x \mid x \textit{ é as cores da bandeira do Brasil}\}$

2. Descreva por meio de uma propriedade característica dos elementos de cada um dos seguintes conjuntos:

   a) $A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$

   b) $B = \{rosa,\ roxo\ vermelho\}$

Resolução:

1. a) $A = \{c, o, n, j, u, t\}$

   b) $B = \{azul,\ verde,\ amarelo,\ branco\}$

2. a) $A = \{x \mid x \textit{ é inteiro, ímpar e positivo}\}$

   b) $B = \{x \mid x \textit{ é cor de uma flor}\}$

Exercícios:

1. Dê os elementos dos seguintes conjuntos:

   a) $C = \{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$

   b) $D = \{x \mid x \geq 2\}$

   c) $E = \{x \mid x \textit{ é um signo do horóscopo}\}$

2. Descreva por meio de uma propriedade característica dos elementos de cada um dos seguintes conjuntos:

   a) $G = \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$

   b) $H = \{5, 10, 15, 20, ...\}$

   c) $I = \{Janeiro,\ Fevereiro,\ Março,\ Abril\}$

1.2 Pertinência

Dado um conjunto C e um objeto l qualquer, a pergunta que interessa fazer a respeito dele é: "l é ou não um elemento do conjunto C?". No caso afirmativo, dizemos que l pertence ao conjunto C e escrevemos $l \in C$. Caso l não seja elemento de C, dizemos que l não pertence ao conjunto C e escrevemos $l \notin C$. Por exemplo, se S é o conjunto dos números inteiros múltiplos de 4, então $16 \in S$ e $9 \notin S$.

Exercícios

1. Dado $A = \{x \mid x\ \acute{e}\ inteiro,\ positivo\ e\ par\}$ e $B = \{x \mid 12 \leq x \leq 30\}$. Diga se os seguintes elementos pertencem aos conjuntos dados:

   a) 10 b) 25 c) 16 d) 3

2. Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4\}$. Escreva com os símbolos da teoria dos conjuntos as seguintes sentenças:

   a) 3 é elemento de A

   b) 1 não está em B

   c) 4 pertence a B e a A

1.3 Conjunto vazio

Imagine um conjunto sem elementos, esse conjunto é denominado conjunto vazio e é representado pelo símbolo $\oslash$. Apesar de não possuir elementos, ele é aceito como um conjunto e é muito útil em casos onde não há objeto que satisfaça a uma condição dada. Por exemplo, existe um número múltiplo de 7 entre 15 e 22, esse número é o 21. Entretanto, não existe um múltiplo de 7 entre 22 e 27. Obtemos então:

$$\{x \mid x\ \acute{e}\ m\acute{u}ltiplo\ de\ 7\ e\ 15 \leq x \leq 22\} = \{21\}$$
$$\{x \mid x\ \acute{e}\ m\acute{u}ltiplo\ de\ 7\ e\ 22 \leq x \leq 27\} = \{\ \} = \oslash$$

Exercícios:

1. Quais dos conjuntos são vazios?

   a) $A = \left\{x \mid x > \frac{9}{4} \; e \; x < \frac{6}{5}\right\}$

   b) $B = \{x \mid \; x \; \acute{e} \; divis\acute{\imath}vel \; por \; 0\}$

   c) $C = \{x \mid \; x \; \acute{e} \; \acute{\imath}mpar \; e \; m\acute{u}ltiplo \; de \; 2\}$

1.4 Relação de inclusão

Suponha que existem dois conjuntos A e C. Se todo elemento de A pertencer a C, então dizemos que A é um subconjunto de C, denotamos esse fato por $A \subset C$. Considere os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $C = \{0,1,2,3,4,5\}$. Todo elemento de A é também elemento de C, ou seja, $1 \in C$, $2 \in C$ e $3 \in C$. Portanto A é subconjunto de C.

Quando $A \subset C$, também dizemos que A está contido em C, ou A é parte de C. A relação $A \subset C$, chama-se relação de inclusão. Um conjunto A não está contido em C quando existe pelo menos um elemento de A que não pertence a C e escrevemos, nesse caso, $A \not\subset C$. Por exemplo, se $A = \{0,1,2\}$ e $C = \{0,2,4\}$, então o conjunto A não está contido em C uma vez que $1 \in A$ e $1 \notin C$. Portanto, neste último exemplo, $A \not\subset C$.

Há duas afirmações um pouco esquisitas sobre inclusões. A primeira é que para todo conjunto A é correto escrever $A \subset A$ (uma vez que todo elemento de A é também elemento de A). A segunda é que para todo conjunto A o conjunto vazio é um subconjunto de A, ou seja, tem-se $\oslash \subset A$. De fato, para que essa afirmação fosse falsa, deveríamos mostrar um elemento que pertence a $\oslash$, mas não pertence a A. Mas isso é impossível, pois o conjunto vazio não possui elementos. Logo, nossa afirmação é verdadeira.

Dois conjuntos A e C são iguais quando possuem os mesmos elementos. Portanto, se $A \subset C$ e $C \subset A$, concluímos que $A = C$. Para deixar claro, quando o objeto x é elemento do conjunto A, escrevemos $x \in A$, mas essa relação tem exatamente o mesmo significado que $\{x\} \subset A$, ou seja, o conjunto cujo único elemento é x esta contido em A.

Exercícios:

1. Sendo $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{1,3,4\}$ e $D = \{1,2,3,4\}$, classifique em V(verdadeiro) ou F(falso) cada sentença.

   a) ( ) $A \subset D$

   b) ( ) $A \subset B$

   c) ( ) $B \subset C$

   d) ( ) $D \supset B$

   e) ( ) $A \not\subset C$

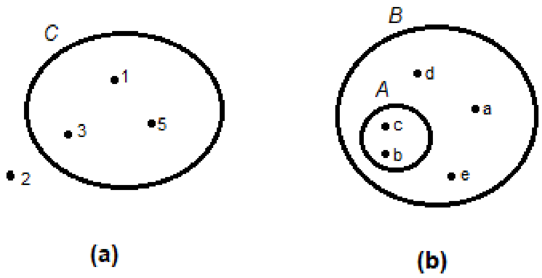
1.5 Representações gráficas

É conveniente representar por pontos os elementos de um conjunto e o próprio conjunto por uma linha que cerca esses pontos. Observe os seguintes exemplos de representações de conjuntos:

$C = \{1,3,5\}$ e $2 \notin C$ (Figura 1a).

$A = \{b,c\}$, $B = \{a,b,c,d,e\}$, $a \notin A$, $a \in B$, $b \in A$, $b \in B$, $c \in A$, $c \in B$ e $A \subset B$ (Figura 1b).

Figura 1.1:



Exercícios:

1. Represente graficamente os seguintes conjuntos:

   a) $E = \{1,2,3,4,6,8\}$ e $F = \{2,4,7,9,13\}$

   b) $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ e $Y = \{-5,-4,...,10\}$

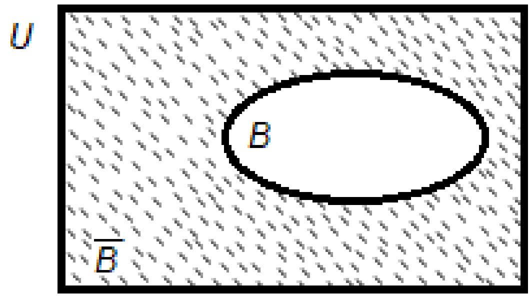
   c) $G = \{13,15,22,36,41,43\}$ e $H = \{22,24,26,...,38,40\}$

1.6 Complementar de um conjunto

Podemos definir o conjunto U chamado de conjunto universo. Só falaremos dos elementos de U e todos os conjuntos que serão utilizados serão subconjuntos de U. Por exemplo, em uma situação que envolve saldos bancários de uma loja trataremos de números racionais, já se estamos trabalhando com a produção de chocolates devemos usar os números inteiros e positivos.

Dado um conjunto B (um subconjunto de U), chama-se conjunto complementar de B o conjunto $\overline{B}$ formado pelos elementos de U que não pertencem a B, ou seja, se $x \in U$ e $x \notin B$, então $x \in \overline{B}$. Observe a ilustração da Figura 1.2.

Figura 1.2:



Exercício Resolvido: Encontre o conjunto complementar de B, se $U = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ e $B = \{3, 6, 9\}$.

Resolução: $\overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

Exercícios:

1. Seja $U = \{1, 2, ..., 19, 20\}$, encontre o complementar dos seguintes conjuntos:

    a) $A = \{2, 4, ..., 18, 20\}$

    b) $B = \{1, 3, 5, ..., 17, 19\}$

    c) $C = \{3, 6, 9, ..., 18\}$

    d) $D = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

1.7 União e intersecção

Dados dois conjuntos A e B, a união desses conjuntos é o conjunto representado por $A \cup B$, formado pelos elementos de A mais os elementos de B. Outra forma de ser interpretada é que a união de dois conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou pertencem a B (ou ambos).

A intersecção dos conjuntos A e B é representada pelo conjunto $A \cap B$, ou seja, os elementos desse conjunto pertencem ao mesmo tempo a A e a B. Simbolicamente temos,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B$$

Ainda, se dois ou mais conjuntos não têm elementos em comum, são chamados de disjuntos e, nesse caso, a intersecção deles é o conjunto vazio.

Exercício Resolvido: Encontre a união e a intersecção dos seguintes conjuntos, $A = \{2,3,6,12\}$, $B = \{1,3,5,7\}$ e $C = \{2,4,6,8\}$.

Resolução: $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,5,6,7,12\}$; $A \cap C = \{2,6\}$, $A \cup C = \{2,3,4,6,8,12\}$; $B \cap C = \{\ \} = \oslash$, $B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; $A \cap B \cap C = \{\ \} = \oslash$, $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,12\}$.

É importante dizer que a palavra "ou" em matemática tem significado diferente do que utilizamos em nossa linguagem. Normalmente, "ou" liga quase sempre duas coisas incompatíveis, como a promessa de um estudante que afirma que vai estudar no sábado ou no domingo. Já na matemática, quando duas alternativas são ligadas pelo conectivo "ou" pode ocorrer perfeitamente que ambas sejam cumpridas. Um exemplo: se procuramos um número múltiplo de 2 ou de 3, encontraremos como uma das respostas o número 6 que satisfaz as duas condições.

Um caso particular, se tivermos $A \subset B$, então $A \cup B = B$ e $A \cap B = A$.

Exercícios

1. Classifique em V(verdadeiro) ou F(falso):

   a) ( ) $\oslash \subset (A \cap B)$

   b) ( ) $A \subset (A \cap B)$

   c) ( ) $(A \cap B) \subset B$

   d) ( ) $A \in (A \cap B)$

   admitindo que A, B e C são conjuntos quaisquer.

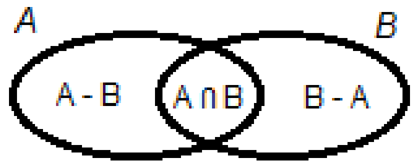
2. Dados os conjuntos $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{b,c,d,e\}$ e $C = \{c,e,f\}$, descreva $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B$ e $A \cup B \cup C$.

3. Dados os conjuntos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$ e $C = \{1,2,4\}$, determine o conjunto X tal que $X \cup B = A \cup C$ e $X \cap B = \oslash$.

1.8 Diferença entre conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a diferença $A - B$ é o conjunto formado pelos elementos de A que não são elementos de B. Ou seja, esse conjunto é formado pelos elementos que pertencem somente a A (Figura 1.3).

Figura 1.3:



Exercício resolvido: Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...\}$ e $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...\}$ encontre $A - B$ e $B - A$.

Resolução: $A - B = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, ...\}$; $B - A = \{3, 9, 15, 21, ...\}$.

Exercícios

1. Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$ e $C = \{b, d, e, g\}$. Determine:

   a) $A - B$

   b) $B - A$

   c) $C - B$

   d) $(A \cup C) - B$

   e) $A - (B \cap C)$

   f) $(A \cup B) - (A \cap C)$

2. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{2, 4, 5, 7\}$, obtenha um conjunto X tal que $X \subset A$ e $A - X = B \cap C$.

1.9 Conjuntos numéricos

1.9.1 Números naturais

Os números foram criados e desenvolvidos pelo homem com a finalidade de contar e medir. A evolução foi muito lenta e, no início, as tribos rudimentares contavam assim: um, dois, muitos. Quando sistemas de numeração foram inventados, o homem pôde contar até tão longe quanto quisesse. Estava criado o conjunto dos números naturais.
O zero como conhecemos hoje, veio bem depois, há cerca de 1000 anos e recentemente, poucas décadas atrás, alguns autores resolveram incluí-lo no conjunto dos naturais. Nesta apostila iremos considerar $0 \in \mathbb{N}$. Nosso conjunto dos números naturais será:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

As reticências indicam que a lista dos elementos de $\mathbb{N}$ não acaba nunca. Não existe, portanto, um elemento maior do que todos no conjunto dos naturais. Os elementos do conjunto $\mathbb{N}$ formam uma sequência, e é isso o que nos permite contar. As regras que valem nesse conjunto, e são exclusivas dele, utilizam a palavra sucessor, cujo significado conhecemos intuitivamente. Sucessor de um objeto em uma sequência é o que vem logo depois dele. Veja quais são essas regras:

1. Todo número natural tem um único sucessor;
2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
3. Existe um único número natural chamado zero, que não é sucessor de nenhum outro.

Exercícios:

1. Seja H o conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid 2 \le n \le 40,\ n\ múltiplo\ de\ 2,\ n\ não\ múltiplo\ de\ 3\}$. Qual é o número de elementos de H ?

1.9.2 Números inteiros

Depois dos números naturais, temos outro conjunto que surge naturalmente. Imagine que para cada número natural $n \neq 0$ seja inventado o número $-n$ com a seguinte propriedade: $-n + n = 0$. Reúna esses novos números com os naturais e obtenha o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Exercícios:

1. Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

   a) ( ) $0 \in \mathbb{N}$

   b) ( ) $(2-3) \in \mathbb{N}$

   c) ( ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

   d) ( ) $(-4)\cdot(-2) \in \mathbb{N}$

   e) ( ) $\frac{3}{2} \in \mathbb{Z}$

   f) ( ) $-100000 \in \mathbb{Z}$

1.9.3 Números racionais

O seguinte conjunto é formado por todas as frações em que numerador e denominador são números inteiros. Este é o conjunto dos números racionais:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a,\ b\ \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

Não é possível fazer uma lista dos número racionais, pois uma vez que, dado um racional, não existe seu sucessor. Assim como nos naturais e inteiros, existe nos racionais a relação de ordem, ou seja, dados dois números racionais, sempre podemos dizer qual deles é menor. Ocorre que, dados dois racionais, existem sempre muitos números racionais entre eles. Por exemplo, se x e y são dois números racionais, o número $\frac{x+y}{2}$ é racional e está entre eles.

Quando escrevemos uma fração na forma decimal, duas coisas podem acontecer. A divisão acaba em algum momento, ou as casas decimais começam a se repetir infinitamente. Observe um exemplo de cada situação: $\frac{11}{8} = 1,375$ e $\frac{23}{15} = 1,5333...$ O segundo exemplo é chamado dízima periódica. Essa é um número cuja parte decimal, a partir de certo ponto, é formada unicamente por um algarismo ou um grupo de algarismos que se repetem indefinidamente sempre na mesma ordem. O algarismo ou grupo de algarismos que se repete é chamado de período.

Exercício resolvido:

1. Diga qual o período das seguintes dízimas periódicas:

   a) $0,22222...$

   b) $1,646464...$

   c) $2,588588588588...$

   d) $0,83155555...$

   e) $3,05737373...$

Resolução:

1. a) tem período 2.

   b) tem período 64.

   c) tem período 588.

   d) tem parte não periódica 831 e período 5.

   e) tem parte não periódica 05 e período 73.

Exercícios

1. Assinale com V(verdadeiro) ou F(falso) as seguintes afirmações:

   a) ( ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

   b) ( ) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

   c) ( ) $0,64568... \in \mathbb{Q}$

   d) ( ) $2 \in \mathbb{Q}$

   e) ( ) $\left\{\frac{4}{7}, \frac{13}{3}\right\} \subset \mathbb{Q}$

2. Coloque em ordem crescente os seguintes números racionais: $\frac{11}{12}, \frac{2}{3}, 1, \frac{15}{16}, \frac{47}{48}$, e $\frac{18}{19}$.

1.9.4 Números irracionais

Se a parte decimal de um número for infinita e não for periódica, esse número é chamado de irracional. O conjunto dos números irracionais é formado por todos os números cuja expansão decimal não é finita e nem periódica, e seu símbolo é $\mathbb{I}$. Por exemplo, ao buscarmos um número cujo quadrado é 2, estaremos procurando um número irracional. Esse número é representado por $\sqrt{2}$, e tem valor aproximado $1,414213562...$ com infinitos dígitos em sua parte decimal, sem ocorrer a repetição de um grupo para sempre.

Exercícios:

1. Determine se os seguintes números pertence ao conjunto dos números irracionais.

   a) $\sqrt{7}$

   b) $\frac{7}{3}$

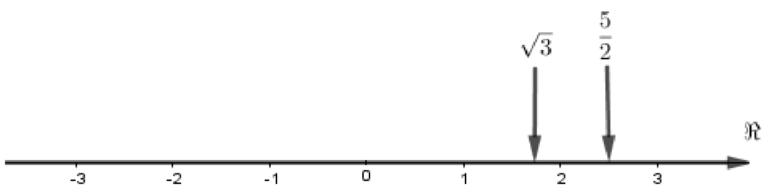
   c) $\frac{9}{2}$

   d) $\sqrt{16}$

1.9.5 Números reais

A união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais é o conjunto dos números reais, que representamos por $\mathbb{R}$.
Assim, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ e cada um de seus elementos pode ser associado a um ponto de um eixo. Um eixo é uma reta onde assinalamos dois pontos: um para representar o zero e o outro para representar o um. Dessa forma qualquer outro número real terá seu lugar nessa reta. Observe a Figura 1.4.

Figura 1.4:



Exercícios:

1. Quais das proposições a seguir são verdadeiras?

    a) ( ) $3 \in \mathbb{R}$

    b) ( ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

    c) ( ) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

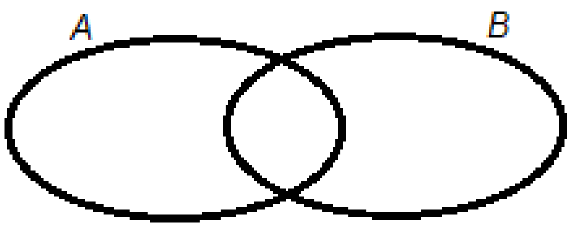
    d) ( ) $\frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

    e) ( ) $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$

1.10 Cardinal de um conjunto

Em algumas situações precisamos saber quantos elementos um conjunto A possui. Então colocamos os elementos de A em fila e contamos: $1, 2, 3, ..., n$. Se o último elemento da fila for associado ao natural n, dizemos que A é um conjunto finito e que possui n elementos. Também se diz que o cardinal do conjunto A é n, e representamos esse fato por: $n(A) = n$.
Se a contagem dos elementos de A não terminar nunca, dizemos que A é um conjunto infinito.
Quando estamos tratando com conjuntos finitos, a relação da Figura 1.5 é bastante útil:

Figura 1.5:



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

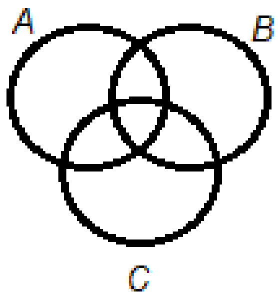
É fácil compreender essa relação. Ela diz que se somarmos os números de elementos dos dois conjuntos, os elementos da intersecção serão contados duas vezes. Assim, descontando o número de elementos da intersecção, obtemos o resultado correto para o número de elementos da união dos dois conjuntos.
Se $A \cap B = \emptyset$, os conjuntos são chamados disjuntos e nesse caso,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Se tivermos três conjuntos (Figura 1.6), a fórmula para encontrar o número de elementos da união deles é obtida de modo semelhante:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Figura 1.6:



Observe que, descontando as intersecções duas as duas, os elementos da região central do diagrama acabaram desaparecendo, pois foram incluídos três vezes e descontados também três vezes. Daí a necessidade de incluirmos esses elementos uma vez no final.

Exercícios:

1. Diga qual a cardinalidade dos seguintes conjuntos:

   a) $N = \{0, 1, 2, ..., 12\}$

   b) $O = \{a, b, c, f, g, h\}$

   c) $P = \{-2, -1, ..., 5, 6\}$

2. Utilizando os conjuntos do exercício anterior, determine:

   a) $n(N \cup P)$

   b) $n(N \cup O \cup P)$

   c) $n(O \cup P)$

1.11 Intervalos

São importantes os conjuntos de números reais denominados intervalos. Eles são os seguintes:
Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (Figura 1.7).

Figura 1.7:

Intervalo aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (Figura 1.8).

Figura 1.8:

Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (Figura 1.9).

Figura 1.9:

Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (Figura 1.10).

Figura 1.10:

Existem ainda os intervalos infinitos, ou seja, as semirretas:

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ (Figura 1.11).

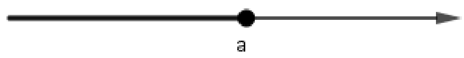
Figura 1.11:

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ (Figura 1.12).

Figura 1.12:

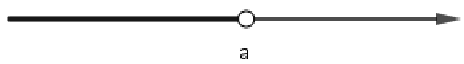
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ (Figura 1.13).

Figura 1.13:



$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ (Figura 1.14).

Figura 1.14:



Exercícios:

1. Represente sobre a reta real cada um dos seguintes intervalos:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

   b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$

   c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \ ou \ x > 2\}$

   d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \ ou \ x \geq 3\}$

2. Descreva, conforme a notação da teoria dos conjuntos, os seguintes intervalos:

   a) $[-1, 3]$

   b) $[0, 2[$

   c) $]-3, 4[$

   d) $]-\infty, 5[$

   e) $[1, +\infty[$

Capítulo 2

Frações

Uma fração nada mais é do que uma razão/divisão usada para representar partes de um todo. O numerador e o denominador são os termos de uma fração e essa pode ser classificada como própria ou imprópria dependendo dos números presentes em seus termos. Uma fração é dita própria se seu numerador é menor que seu denominador, e é dita imprópria se seu numerador é maior ou igual ao seu denominador.

$$\frac{a \rightarrow \text{numerador}}{b \rightarrow \text{denominador}}$$

2.1 Comparação de frações

Para comparar frações, devemos analisar seus termos considerando o conceito de "parte de um todo". Podem ocorrer alguns casos:

- Numeradores iguais: a maior fração é aquela cujo denominador é menor. Por exemplo, se dividirmos uma pizza em 4 fatias, teremos uma fatia grande, mas se dividirmos em 8 fatias, teremos uma fatia pequena. Portanto, quanto maior for o número pelo qual dividimos, considerando um mesmo numerador, menor será nosso resultado.

- Denominadores iguais: a maior fração é aquela cujo numerador é maior. Por exemplo, se dividirmos uma pizza "broto" em 4 fatias, temos uma fatia pequena, mas se dividirmos uma pizza "gigante" em 4 fatias, teremos uma fatia grande. Desse modo, quanto maior o número a ser dividido, considerando o mesmo denominador, maior será o resultado obtido.

Numeradores iguais | Denominadores iguais

$$\frac{2}{3} \quad \frac{2}{9} \qquad\qquad \frac{3}{5} \quad \frac{7}{5}$$

Maior Fração

- Numeradores e denominadores diferentes: Nesse caso, devemos alterar a fração por uma forma equivalente, de modo a deixá-la com o mesmo numerador ou o mesmo denominador que a outra, a fim de poder compará-las.

2.1.1 Frações equivalentes

Frações equivalentes são aquelas que representam a mesma quantidade ou a mesma parte do todo. Quando se multiplica ou divide o numerador e o denominador da fração por um mesmo número, diferente de zero, obtêm-se uma fração equivalente a primeira.

$$\frac{1}{2} \underset{x2}{\overset{x2}{=}} \frac{2}{4} \underset{x2}{\overset{x2}{=}} \frac{4}{8} \underset{x3}{\overset{x3}{=}} \frac{12}{24}$$

Por exemplo, se pensarmos na pizza novamente, considerando uma pizza pequena inicial e dividida em 4 fatias, quando temos uma pizza com o dobro de tamanho e dividida pelo dobro do número de fatias, conseguimos fatias de tamanhos equivalentes. Com as frações ocorre o mesmo.

Mas como comparar frações usando o método das frações equivalentes?

Vamos comparar $\frac{1}{2}$ com $\frac{5}{3}$. Antes de tudo, precisamos deixar as frações com o mesmo denominador, então vamos multiplicar o numerador e o denominador da primeira por 3 e o numerador e o denominador da segunda por 2. Assim, obtemos frações de mesmo denominador 6 e podemos compará-las com a regra citada anteriormente.

$$\frac{1}{2} \underset{x3}{\overset{x3}{=}} \frac{3}{6} \qquad \frac{5}{3} \underset{x2}{\overset{x2}{=}} \frac{10}{6}$$

$$\frac{3}{6} \qquad \frac{10}{6}$$

Mesmo denominador
Maior numerador
corresponde a maior fração

Vale destacar que, também é possível multiplicar as frações por valores que igualem os numeradores, a fim de comparar os denominadores e descobrir qual a maior fração.

2.1.2 Regra prática para comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes

Essa técnica deriva da regra anterior, mas tem um caráter muito mais prático para se economizar tempo. Dadas duas frações com numeradores e denominadores diferentes, basta multiplicar o denominador da primeira pelo numerador da segunda e considerar esse número como "equivalente" à segunda fração. Depois, multiplicar o denominador da segunda pelo numerador da primeira e considerar esse número como "equivalente" a primeira fração.

Comparar os números onde o maior representará a maior fração e o menor representará a menor fração.

$$\overset{4 \cdot 2 = 8}{\frac{2}{5}} \times \overset{5 \cdot 3 = 15}{\frac{3}{4}}$$

Como:

$8 < 15$

Então:

$\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$

2.2 Simplificação

A partir da ideia de frações equivalentes, surge a simplificação. A qual significa dividir o numerador e o denominador da fração por um divisor comum tantas vezes quanto forem necessárias, a fim de chegar em uma fração equivalente e irredutível, ou seja, uma fração que não se pode mais dividir.

$$\frac{32}{48} \xrightarrow{:2} \frac{16}{24} \xrightarrow{:2} \frac{8}{12} \xrightarrow{:2} \frac{4}{6} \xrightarrow{:2} \frac{2}{3}$$

$$\frac{10}{130} \xrightarrow{:5} \frac{2}{26} \xrightarrow{:2} \frac{1}{13}$$

Exercícios:

1. Compare as seguintes frações:
   a) $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{8}$ c) $\frac{7}{9}$ e $\frac{8}{7}$ d) $\frac{2x}{8}$ e $\frac{3x}{7}$

2. Simplifique as frações até chegar em sua forma irredutível:

   a) $\frac{1024}{2048}$ b) $\frac{48}{72}$ c) $\frac{81x}{108x}$ d) $\frac{27x}{81y}$

3. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso) com relação a equivalência das frações:
   ( ) $\frac{14}{35}$ é equivalente à $\frac{2}{5}$

   ( ) $\frac{5}{2}$ é equivalente à $\frac{2}{5}$

   ( ) $\frac{100}{1000}$ é equivalente à $\frac{10}{100}$ que, por sua vez, é equivalente à $\frac{1}{10}$

   ( ) $\frac{25x}{50x}$ é equivalente à $\frac{1}{2}$

2.3 Adição e subtração de frações

Para efetuar as operações de adição e subtração de frações primeiro, deve-se analisar os denominadores, pois eles determinarão o método utilizado.

- Denominadores iguais: conservar o denominador e realizar a operação normalmente entre os numeradores.

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1+5}{3} = \frac{6}{3}$$

$$\frac{9}{7} - \frac{4}{7} = \frac{9-4}{7} = \frac{5}{7}$$

- Denominadores diferentes:

1. Fazer o *mmc* entre os denominadores, esse será o novo denominador de ambas as frações;
2. Para a primeira fração, dividir o novo denominador pelo antigo e multiplicar esse resultado pelo numerador da mesma fração. Assim, obtêm-se o novo numerador da fração;
3. Realizar o mesmo processo para a segunda fração;
4. Agora que ambas as frações possuem o mesmo denominador, basta realizar a operação entre os numeradores, conservando o denominador.

$$\frac{7}{5} + \frac{3}{4} = \frac{28}{20} + \frac{15}{20} = \frac{43}{20}$$

x 7 x 3 : 5 : 4

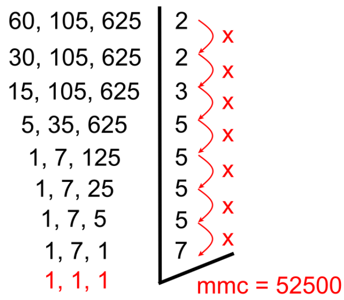
2.3.1 Mínimo múltiplo comum

O "mínimo múltiplo comum" ou "*mmc*" é usado quando se quer calcular o menor número que é múltiplo de ambos os valores. Mas o que é um múltiplo? Um múltiplo é um número que corresponde ao valor inicial multiplicado por algum outro número inteiro. Veja alguns exemplos:

- Múltiplos de $2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, \ldots$
- Múltiplos de $3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, \ldots$
- Múltiplos de $5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, \ldots$

Note agora que os múltiplos comuns entre 2 e 3 são 6, 12, 18, 24, 30 e outros infinitos mais. Porém, quando se fala em *mmc*, queremos o menor múltiplo e nesse caso será o 6.
Já comparando o 2 e o 5, temos como múltiplos comuns: 10, 20, 30 e muitos outros maiores. Entretanto, o *mmc* entre 2 e 5 será o menor desses múltiplos, o 10.
Da mesma maneira, pode-se comparar os três números ao mesmo tempo, chegando à conclusão de que o *mmc* entre 2, 3 e 5 é 30.

Mas e quando os números são muito grandes e não podemos analisar dessa maneira? Nesse caso, fatoramos os números ao mesmo tempo e multiplicamos todos os fatores primos, chegando assim no *mmc* procurado.



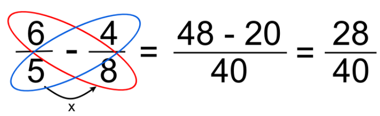
2.3.2 Método da borboleta

Esse método, geralmente, é utilizado para facilitar os cálculos e tornar sua resolução mais rápida. Ele consiste em somar ou subtrair as frações de acordo com os seguintes passos:

1. Multiplicar os denominadores das frações. Esse resultado será o novo denominador;

2. Multiplicar em diagonal os termos das frações (do mesmo modo utilizado na regra prática de comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes) formando assim seus numeradores;

3. Resolver a operação entre os numeradores.



Observe que o método é chamado de “borboleta” pela multiplicação cruzada que lembra as asas do inseto. Voltando ao cunho matemático, a técnica produz uma fração que pode ser simplificada, ou seja, forma frações não necessariamente irredutíveis.

Exercícios:

1. Resolva as operações com frações e, se necessário, simplifique-as:

a) $\frac{2}{3}+\frac{6}{3}$ b) $\frac{7}{8}-\frac{5}{9}$ c) $\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}$ d) $\frac{5x+3}{2}-\frac{4}{7}$ e) $\frac{6x}{5}+\frac{3y}{2}$

f) $\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(x+1)^2}{2}$ g) $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{7}{9}$ h) $\frac{2x}{3}-\frac{x}{9}+\frac{5}{3x}$ i) $\frac{y}{x}+\frac{7}{x}+\frac{(x+7)^5}{x}$

j) $\frac{a}{b}-\frac{x}{y}$

2.4 Multiplicação e divisão de frações

Diferentemente da soma e subtração, na multiplicação e divisão não é necessário se atentar para os denominadores iguais. A multiplicação ocorre de forma linear, isso é, o numerador multiplica o numerador e, o denominador multiplica o denominador.

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}=\frac{a\cdot x}{b\cdot y}=\frac{ax}{by}$$

Já na divisão, devemos nos atentar para a seguinte regra: copia-se a primeira fração (ou a "de cima") e multiplica-se pelo inverso da segunda (ou a "de baixo").

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{3}}=\frac{a}{2}\cdot\frac{3}{b}=\frac{3a}{2b}$$

Essa pequena regra deriva de uma multiplicação do numerador $\frac{a}{2}$ e do denominador $\frac{b}{3}$ pelo inverso do denominador, ou seja, $\frac{3}{b}$, pois assim, o denominador se reduzirá a 1, e todo número dividido por 1 resulta nele mesmo. Analisando o exemplo a seguir, notamos a correspondência de resultados.

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{3}}=\frac{\frac{a}{2}\times\frac{3}{b}}{\frac{b}{3}\times\frac{3}{b}}=\frac{\frac{3a}{2b}}{1}=\frac{3a}{2b}$$

Exercícios:

1) Resolva as operações de multiplicação e divisão de frações:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{4}$

b) $\frac{7a}{b} \cdot \frac{9b^2}{3}$

c) $\frac{\frac{13}{14}}{\frac{26}{7}}$

d) $\frac{\frac{x^2+2x}{3}}{\frac{x}{3}}$

e) $\frac{\frac{h^2+4h}{3}}{\frac{3}{h}}$

f) $\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{d^3}{5}$

g) $\frac{\frac{81xy}{27}}{\frac{3y}{2}}$

h) $\frac{x^2+1}{y} \cdot \frac{2y}{x^2+1}$

Capítulo 3

Potências, Raízes e Produtos Notáveis

Neste capítulo serão estudadas potências e raízes, bem como suas propriedades, além de produtos notáveis e casos de racionalização.

3.1 Potências

3.1.1 Potência de expoente natural

Seja a um número diferente de zero. Para todo n natural (não nulo), definimos:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ fatores}}$$

Vejamos que o expoente n determina quantas vezes devemos multiplicar a base a.

Exemplos:

- $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

- $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

- $1^8 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

- $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

- $(-7)^3 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = -343$

Observe que, quando a base for negativa, se o expoente for ímpar, o resultado será negativo, se o expoente for par, o resultado será positivo. Portanto:

- Para todo número real a, tem-se $a^2 \geq 0$.
- Se $a < 0$, tem-se $a^n > 0$, se n for par, e $a^n < 0$ se n for ímpar.

Se o expoente for zero, definimos $a^0 = 1$.

Se a base for zero e o expoente positivo ($n > 0$) tem-se $0^n = 0$.

Mas atenção, 0^0 não está definido.

Propriedades:

Para operar potências é necessário conhecer as seguintes propriedades:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Exemplos:

- $2^3 \cdot 2^6 = 2^{3+6} = 2^9 = 512$
- $\dfrac{5^7}{5^6} = 5^{7-6} = 5^1 = 5$
- $(9^3)^2 = 9^{3\cdot 2} = 9^6 = 531441$
- $(3 \cdot 2)^4 = 3^4 \cdot 2^4 = 81 \cdot 16 = 1296$
- $\left(\dfrac{20}{4}\right)^2 = \dfrac{20^2}{4^2} = \dfrac{400}{16} = 25$

3.1.2 Potência de expoente inteiro

Para quaisquer $a \neq 0$ e n natural temos:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

Observe que o expoente negativo indica que devemos inverter a e elevar o numerador e o denominador a n.

Exemplos:

- $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$
- $\left(\dfrac{2}{4}\right)^{-3} = \dfrac{4^3}{2^3} = \dfrac{64}{8} = 8$
- $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} = \dfrac{2^5}{1^5} = \dfrac{32}{1} = 32$

As regras anteriores para expoente natural valem para expoente inteiro. Veja suas aplicações a seguir:

- $2^3 \cdot 4^{-6} = 2^3 \cdot (2^2)^{-6} = 2^3 \cdot 2^{-12} = 2^{-9} = \dfrac{1}{2^9} = \dfrac{1}{512}$
- $\dfrac{9^2}{27^{-3}} = \dfrac{(3^2)^2}{(3^3)^{-3}} = \dfrac{3^4}{3^{-9}} = 3^{4-(-9)} = 3^{4+9} = 3^{13} = 1594323$

Exercícios:

1. (FATEC) Das três sentenças abaixo:

$$\begin{aligned} \text{I. } & 2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 \\ \text{II. } & (25)^x = 5^{2x} \\ \text{III. } & 2^x + 3^x = 5^x \end{aligned}$$

a) somente a I é verdadeira.

b) somente a II é verdadeira.

c) somente a III é verdadeira.

d) somente a II é falsa.

e) somente a III é falsa.

2. (FEI-SP) O valor da expressão $B = 5 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^{-3}$ é:

a) 20^6.

b) $2 \cdot 10^6$.

c) $2 \cdot 10^9$.

d) $20 \cdot 10^{-4}$.

3. (UFPA) Simplificando a expressão $\left[\dfrac{2^9}{(2^2 \cdot 2)^3}\right]^{-3}$, obtém-se:

a) 2^{-1}.

b) 2^{-30}.

c) 2^{-6}.

d) 1.

e) 2^{36}.

4. (UFRGS) O valor da expressão $\dfrac{(-5)^2 - 4^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^0}{3^{(-2)} + 1}$ é:

   a) -4.

   b) $\dfrac{1}{9}$.

   c) 1.

   d) $\dfrac{5}{4}$.

   e) 9.

5. (Mackenzie) O valor da expressão $\dfrac{(-5)^2 - 3^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^0}{3^{-2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}}$ é igual a:

   a) $\dfrac{3150}{17}$.

   b) 90.

   c) $\dfrac{1530}{73}$.

   d) $\dfrac{17}{3150}$.

   e) -90.

6. (UFMG) O valor da expressão $(a^{-1} + b^{-1})^{-2}$ é:

   a) $\dfrac{ab}{(a+b)^2}$.

   b) $\dfrac{ab}{(a^2+b^2)^2}$.

   c) $a^2 + b^2$.

   d) $\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2}$.

7. Simplificando a expressão $x = \dfrac{3^a + 3^{a+2}}{3^{a-1}}$, obtemos:

   a) $x = 20$.

   b) $x = 30$.

   c) $x = 40$.

   d) $x = 3^a$.

   e) $x = 3^{a+1}$.

8. (Prefeitura de Landri Sales - PI) A expressão numérica $\dfrac{64^6}{128^4} \cdot 1024$, encontra-se como forma de única potência na seguinte alternativa:

   a) 2^{20}.

   b) 2^{18}.

c) 2^7.

d) 2^4.

9. (EPCAR) Simplificando-se a expressão $S = \dfrac{\left(x^{-2}\right)^{2^{2^2}} \cdot \left[\left(-x^{-2}\right)^{3^{2^2}}\right]^{-1}}{x^{2^3} \cdot \left[\left(-x^3\right)^{3^2}\right]^{2^3}}$ onde $x \neq 0$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$, obtém-se:

a) $-x^{-94}$.

b) x^{94}.

c) x^{-94}.

d) $-x^{94}$.

3.2 Raízes

3.2.1 Raiz quadrada

De forma geral, se $a \geqslant 0$, a raiz quadrada de a é o número positivo b tal que $b^2 = a$. Escrevemos:

$$\sqrt{a} = b$$

Sabemos que $3^2 = 9$ e também que $(-3)^2 = 9$. Porém, o correto é escrever $\sqrt{9} = |3|$, e não ± 3. Por outro lado, na equação $x^2 = 25$ devemos ter em mente que x é qualquer número cujo quadrado é 25. Há portanto, dois valores possíveis para x, resultando em:

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} \Rightarrow x = \pm 5$$

Assim, os dois valores que satisfazem a equação dada são $x = 5$ e $x = -5$.

Propriedades:

- Se a é um número positivo, então:

  $\sqrt{a^2} = a$

  $\sqrt{a^4} = a^2$

  $\sqrt{a^6} = a^3$

  etc.

- Se a e b são positivos, então $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

- Se a e b são positivos, então $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Repare que, em particular, a partir das propriedades podemos concluir que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$.

Usando essas propriedades, podemos simplificar a escrita de algumas raízes quadradas. Por exemplo, se desejamos simplificar a escrita de $x = \sqrt{432}$ podemos notar que $432 = 2^4 \cdot 3^3$, então:

$$x = \sqrt{432} = \sqrt{2^4 \cdot 3^3} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 3} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

que é uma forma mais agradável de representar o número x.

Nas situações contextualizadas, devemos dar como resultado um número decimal aproximado do valor correto. Por exemplo, não tem sentido dizer que a largura de uma rua é $\sqrt{170}$ metros. O valor exato é abstrato e não nos dá imediatamente a compreensão de seu valor. O melhor, nesse caso, é dizer que a largura da rua é de, aproximadamente, 13 metros. Isso dá uma ideia concreta da medida da largura da rua.
Essas situações são tão frequentes que é conveniente conhecer os valores aproximados de três raízes quadradas:

$$\sqrt{2} \cong 1,41$$
$$\sqrt{3} \cong 1,73$$
$$\sqrt{5} \cong 2,24$$

Não esqueça que, em situações contextualizadas, um valor aproximado dá uma informação em geral mais interessante do que o valor exato.

3.2.2 Outras raízes

Existem raízes cujo índice é um número natural qualquer diferente de zero. A raíz de índice n de um número real a é representada por $\sqrt[n]{a}$ e definida assim:

- Se n é par, e se a é positivo, $\sqrt[n]{a}$ é o número positivo b tal que $b^n = a$.

Nesse caso, se a é negativo, a raíz de índice par não está definida em $\mathbb{R}$.

- Se n é ímpar, $\sqrt[n]{a}$ é o número b tal que $b^n = a$.

Nesse caso, se a é positivo então b também é positivo e se a é negativo, b também é negativo.
Para entender bem o que foi dito, observe atentamente os exemplos:

- $\sqrt[3]{125} = 5$, porque $5^3 = 125$.
- $\sqrt[3]{-125} = -5$, porque $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$.
- $\sqrt[4]{81} = 3$, porque $3^4 = 81$.

- $\sqrt[4]{-81}$ não existe, porque um número elevado a um expoente par não pode ser negativo em $\mathbb{R}$.

Propriedades:

Para a e b positivos e n natural não nulo, valem as propriedades:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
- $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ (k natural não nulo)

Os exemplos a seguir ilustram a utilização dessas propriedades:

- $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$
- $\frac{\sqrt[3]{400}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{400}{10}} = \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = 2 \cdot \sqrt[3]{5}$
- $\sqrt{2^3} = \left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5^{24}}} = \sqrt[12]{5^{24}} = \sqrt[12]{5^{2 \cdot 12}} = 5^2 = 25$

3.2.3 Racionalização (primeiro caso)

Chamamos de racionalizante de uma expressão que contém radicais outra expressão que, multiplicada por ela, dá um resultado sem radicais. Por exemplo, a racionalizante de $\sqrt{3}$ é também $\sqrt{3}$, pois, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$. Veja também que a racionalizante de $\sqrt[3]{2}$ é $\sqrt[3]{4}$, pois $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$.
Veja a seguir alguns exemplos de expressões com suas racionalizantes. Faça manualmente o produto delas para constatar que o resultado não possui radicais.

Expressão	Racionalizante
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{a^2}$
$\sqrt[5]{a^2}$	$\sqrt[5]{a^3}$
$\sqrt{a^3bc^4}$	$\sqrt{ab}$
$\sqrt[7]{a^2bc^4}$	$\sqrt[7]{a^5b^6c^3}$

A racionalização é utilizada para retirar incômodos radicais dos denominadores das frações. Assim, por exemplo, a expressão $\frac{10}{\sqrt{5}}$ pode ter seu denominador racionalizado, bastando multiplicar numerador e denominador da fração pela expressão racionalizante.

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

Esse é um resultado mais agradável do que a expressão original.

Exemplos: Observe casos da racionalização de denominadores.

- $\frac{6}{\sqrt[5]{16}} = \frac{6}{\sqrt[5]{2^4}} = \frac{6 \cdot \sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2^4} \cdot \sqrt[5]{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{6 \cdot \sqrt[5]{2}}{2} = 3\sqrt[5]{2}$

- $\frac{a^2b}{\sqrt[3]{ab^2}} = \frac{a^2b \cdot \sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[3]{a^2b}} = \frac{a^2b \cdot \sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^3b^3}} = \frac{a^2b \cdot \sqrt[3]{a^2b}}{ab} = a \cdot \sqrt[3]{a^2b}$

3.2.4 Expoente racional

Seja a um número positivo. Vamos definir a potência de expoente racional. Sendo m e n números naturais, a potência de expoente $\frac{m}{n}$ é definida por:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Essa forma de escrever substitui as raízes e mantém todas as propriedades que foram enunciadas anteriormente. Para melhor compreenção, observe atentamente os exemplos a seguir.

- $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$

- $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$

- $\left(\sqrt{6}\right)^8 = \left(6^{\frac{1}{2}}\right)^8 = 6^4 = 1296$

- $\left(\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{8}}\right)^{-6} = \left(\frac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt{2^3}}\right)^{-6} = \left(\frac{2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{3}{2}}}\right)^{-6} = \left(2^{\frac{4}{3}-\frac{3}{2}}\right)^{-6} = \left(2^{-\frac{1}{6}}\right)^{-6} = 2^{-\frac{1}{6}\cdot(-6)} = 2^1 = 2$

- $\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{81} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{3^4} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = 3^{\frac{7}{6}}$

- $\sqrt{8 \cdot \sqrt[3]{4}} = \sqrt{2^3 \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \sqrt{2^3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}} = \left(2^3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{3+\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{11}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 2^{\frac{11}{6}}$

Se você desejar voltar para a notação de raízes, os dois últimos resultados podem ser representados assim:

- $3^{\frac{7}{6}} = 3^{1+\frac{1}{6}} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{6}} = 3\sqrt[6]{3}$

- $2^{\frac{11}{6}} = 2^{1+\frac{5}{6}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{5}{6}} = 2 \cdot \sqrt[6]{2^5} = 2\sqrt[6]{32}$

Exercício resolvido: Qual o resultado de $16^{1,25}$?

Resolução: Veja que $16 = 2^4$ e que $1,25 = 1 + \frac{25}{100} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Temos, portanto:

$$16^{1,25} = \left(2^4\right)^{\frac{5}{4}} = 2^{4\cdot\frac{5}{4}} = 2^5 = 32$$

Exercícios:

1. Calcule:

   a) $\sqrt{784}$

   b) $\sqrt{200}$

2. Após cálculos serem feitos, foi constatado que a ponte a ser construída em determinado rio deveria ter $30\sqrt{5}m$. Isso equivale a quantos metros, aproximadamente?

   a) $60m$.

   b) $67m$.

   c) $70m$.

   d) $75m$.

3. Encontre um valor aproximado para $\sqrt{2187}$.

   a) 54.

   b) 51,44.

   c) 46,71.

   d) 43,82.

4. Calcule $\sqrt[3]{-8}$.

5. Determine qual dos quatro números é maior: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ ou $\sqrt[3]{3}$.

   a) $\sqrt{2}$.

   b) $\sqrt{3}$.

   c) $\sqrt[3]{2}$.

   d) $\sqrt[3]{3}$.

6. Calcule:

   a) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$

   b) $\dfrac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}$

   c) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{375^9}}$

7. $8^{\frac{9}{3}}$ é equivalente a:

   a) 64.

   b) 512.

   c) 2.

   d) $16\sqrt{2}$.

8. Calcule $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

9. Calcule $y = \sqrt{27} + 2\sqrt{48} - 3\sqrt{108}$.

   a) $6\sqrt{3}$.

   b) $-7\sqrt{3}$.

   c) $-8\sqrt{2}$.

   d) $9\sqrt{3}$.

3.3 Propriedade distributiva

Para quaisquer reais a, b e c, temos:

$$a(b+c) = ab + ac$$

Isso significa que a foi distribuído nas parcelas da soma.

A operação inversa chama-se colocar em evidência um fator comum. Assim, na soma $ab+ac$, como cada parcela possuí o fator a, podemos colocar esse fator em evidência e escrever:

$$ab + ac = a(b+c)$$

Colocar em evidência é útil para simplificar expressões, como você pode ver a seguir:

- $\dfrac{4a+6b}{2c} = \dfrac{2\cdot 2\cdot a + 2\cdot 3b}{2c} = \dfrac{2(2a+3b)}{2c} = \dfrac{2a+3b}{c}$
- $\dfrac{x^3+2x^4}{x^3} = \dfrac{x^3+2x\cdot x^3}{x^3} = \dfrac{x^3(1+2x)}{x^3} = (1+2x)$
- $\dfrac{a^2bc - ab^2c + abc^2}{abc} = \dfrac{a(abc) - b(abc) + c(abc)}{abc} = \dfrac{abc(a-b+c)}{abc} = a - b + c$

Para desenvolver um produto de dois fatores com várias parcelas dentro de cada um, multiplicamos cada parcela do primeiro fator por todas as parcelas do segundo fator.

$$(a+b)(x+y+z) = a(x+y+z) + b(x+y+z) = ax + ay + az + bx + by + bz$$

Exemplo:

- $(x-2)(x^2+3x+1) = x(x^2+3x+1) - 2(x^2+3x+1) = x^3+3x^2+x-2x^2-6x-2 = x^3+x^2-5x-2$

3.4 Produtos notáveis

Produtos notáveis são produtos de expressões algébricas que possuem uma forma geral para sua resolução. Eles servem para facilitar cálculos e agilizar operações matemáticas. Existem alguns produtos notáveis mais relevantes, os quais veremos a seguir:

1. **Quadrado da soma de dois termos:**

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemplo:

- $(7+r)^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot r + r^2 = 49 + 14r + r^2$

2. **Quadrado da diferença de dois termos:**

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemplo:

- $(l-3)^2 = l^2 - 2 \cdot l \cdot 3 + 3^2 = l^2 - 6l + 9$

3. **Produto da soma pela diferença de dois termos:**

$$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Exemplo:

- $(10+y)(10-y) = 100 - y^2$

4. **Quadrado da soma de três termos:**

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c) =$$
$$a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Exemplo:

- $(1+r+u)^2 = 1^2 + r^2 + u^2 + 2 \cdot 1 \cdot r + 2 \cdot r \cdot u + 2 \cdot 1 \cdot u = 1 + r^2 + u^2 + 2r + 2ru + 2u$

5. **Cubo da soma de dois termos:**

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) =$$
$$a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Exemplo:

- $(z+5)^3 = z^3 + 3 \cdot z^2 \cdot 5 + 3 \cdot z \cdot 5^2 + 5^3 = z^3 + 15z^2 + 75z + 125$

6. **Cubo da diferença de dois termos:**

$$(a-b)^3 = (a-b)(a^2-2ab+b^2) = a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2) =$$
$$a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Exemplo:

- $(m-7)^3 = m^3 - 3 \cdot m^2 \cdot 7 + 3 \cdot m \cdot 7^2 - 7^3 = m^3 - 21m^2 + 147m - 343$

Também são interessantes as fatorações de a^3+b^3 e a^3-b^3.

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

3.5 Racionalização (segundo caso)

O racionalizante da expressão $a\sqrt{A}+b\sqrt{B}$ é sua expressão conjugada, ou seja, $a\sqrt{A}-b\sqrt{B}$. De fato, o produto delas é:

$$\left(a\sqrt{A}+b\sqrt{B}\right)\left(a\sqrt{A}-b\sqrt{B}\right) = \left(a\sqrt{A}\right)^2 - \left(b\sqrt{B}\right)^2 = a^2A - b^2B$$

que não possui radicais.
Por exemplo, para racionalizar o denominador de $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$, multiplicamos o numerador e o denominador dessa fração pela expressão conjugada do denominador. Observe:

$$\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{3\sqrt{3}+3+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2} = \frac{3\sqrt{3}+3+3+\sqrt{3}}{3-1}$$

$$= \frac{6+4\sqrt{3}}{2} = \frac{2\left(3+2\sqrt{3}\right)}{2} = 3+2\sqrt{3}$$

Exercícios:

1. Efetuando a multiplicação $\left(\frac{ab}{3}-\frac{c}{2}\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{c}{2}\right)$ por meio da propriedade distributiva encontramos:

   a) $\dfrac{ab}{6} + \dfrac{abc}{6} - \dfrac{ac}{6} + \dfrac{c^2}{4}$.

   b) $\dfrac{ab^2}{6} - \dfrac{abc}{4} + \dfrac{ac}{4} + \dfrac{c^2}{4}$.

c) $\frac{a^2b}{6} - \frac{abc}{6} - \frac{ac}{4} + \frac{c^2}{4}$.

d) $\frac{a^2b}{6} + \frac{abc^2}{6} + \frac{ac}{4} + \frac{c^2}{6}$.

2. Calcule:

   a) $\left(3m^2 + 4n\right)^2$

   b) $\frac{5}{\sqrt{7}+2}$

   c) $\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1}$

3. Agrupando os termos semelhantes na expressão $ay^3 + 4by - 16by + 5ay^3$ e utilizando o método do fator comum em evidência encontramos:

   a) $6y(ay - 2b)$.

   b) $5y(2ay + 2b)$.

   c) $2y(a^2y^2 - 2b)$.

   d) $6y(ay^2 - 2b)$.

4. Qual o valor de p na expressão $a^2 - 6ab + 9b^2 = (a - p)^2$?

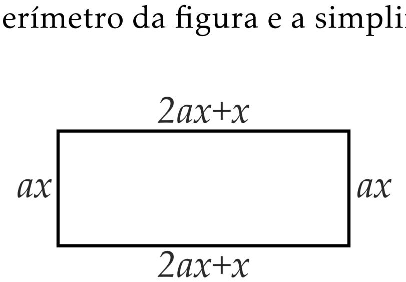
   a) $6b$.

   b) $2b$.

   c) $3b$.

   d) $4b$.

5. Obtenha a expressão do perímetro da figura e a simplifique. Logo, o perímetro é:



   a) $P = 2x(3a + 1)$.

   b) $P = 3x(3a^2 + 1)$.

   c) $P = 2x(2a - 1)$.

   d) $P = 2x^2(3a + 1)$.

6. Simplificando a expresssão $n^2 + nx + nc + cx$ temos:

   a) $\dfrac{(n+x)}{(n+c)}$.

   b) $(n^2 + x)(n - c)$.

   c) $(n + x)(n + c)$.

   d) $(2n - x)(n + 2c)$.

7. Calcule :

   a) $(0,4 + x)^2$

   b) $\left(a^2b^3 + 2\right)^3$

Capítulo 4

Polinômios

Um polinômio é uma soma de monômios. Um monômio é um termo algébrico cujo coeficiente é real e cujos expoentes são naturais. Assim $7x^2$, $5xz$, $\frac{4}{3}yz^3$ são exemplos de monômios. Como caso particular, qualquer constante é considerada também um monômio. Se um polinômio possui apenas a variável x, ele é, em geral, representado por $p(x)$. Se possui as variáveis x e y, é costume representá-lo por $p(x,y)$. Se o polinômio tiver $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ variáveis, ele será representado por $p(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$.

Genericamente, um polinômio na variável x é indicado por $p(x)$ a partir de uma expressão do tipo:

$$a_0x_n^n + a_1x_{n-1}^{n-1} + ...a_{n-1}x + a_n$$

O grau de um polinômio é o de seu monômio de maior grau. Assim, por exemplo, $p(x,y) = 8x^2y^4 + 15x^5 - x^6y^7$ dizemos que o grau de $p(x,y)$ é 7.

O valor numérico de um polinômio é o número que se obtém quando substituímos as letras por números. Se temos um polinômio $p(x)$, seu valor numérico para $x = 1$ é $p(1)$, para $x = 10$ é $p(10)$ e para $x = x_n$ seu valor é $p(x_n)$.

4.1 Fatoração

Fatorar um polinômio significa transformá-lo num produto de polinômios de graus menores do que o do polinômio original. Se os termos do polinômio possuem fatores comuns, basta colocá-los em evidência para obter a fatoração.

Exercício resolvido: Fatore $2a^2b + 3a^3c - a^4$.

Resolução: Como não existe um número que divide ao mesmo tempo 2, 3 e 1, não iremos colocar nenhum número em evidência.
A letra a se repete em todos os termos. O fator comum será o a^2, que é o menor expoente do

a na expressão. Dividindo cada termo do polinômio por a^2:

$$2a^2b : a^2 = 2a^{2-2}b = 2b$$

$$3a^3c : a^2 = 3a^{3-2}c = 3ac$$

$$a^4 : a^2 = a^2$$

Colocamos o a^2 em evidência e os resultados das divisões dentro dos parênteses:

$$2a^2b + 3a^3c - a^4 = a^2(2b + 3ac - a2)$$

Exercícios:

1. Fatore utilizando fatoração por agrupamento:

   a) $ab + ac + bd + cd$

   b) $x^2 + ax - bx - ab$

2. Fatore utilizando a diferença de dois quadrados:

   a) $9x^2 - 16$

   b) $25 - 4a^2m^6$

3. Fatore a soma de dois cubos: $a^3 + b^3$.

4. A expressão $(x-1)^2 + (x-1)^3$ equivale a?

5. Fatore o polinômio $p(x) = (x-1)(x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4)$.

4.2 Operações com polinômios

As operações de adição e subtração são feitas nos termos semelhantes. Por exemplo, se $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ e se $q(x) = x^4 - x^3 + 2x - 3$, a soma e a diferença desses polinômios são:

$$p(x) + q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 7 + x^4 - x^3 + 2x - 3 = x^4 - 4x^2 + 7x + 4$$

$$p(x) - q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 7 - x^4 - x^3 + 2x - 3 = -x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x + 10$$

Na operação de multiplicação, usamos a propriedade distributiva e, em seguida, agrupamos os termos semelhantes. Considere $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ e $q(x) = x^4 - x^3 + 2x - 3$, a multiplicação desses polinômios é:

$$p(x) \cdot q(x) = (x^3 - 4x^2 + 5x + 7) \cdot (x^4 - x^3 + 2x - 3)$$

$$p(x) \cdot q(x) = x^7 - x^6 + 2x^4 - 3x^3 - 4x^6 + 4x^5 - 8x^3 + 12x^2 + 5x^5 - 5x^4 + 10x^2 - 15x + 7x^4 + 7x^3 + 14x - 21$$

$$p(x) \cdot q(x) = x^7 - 5x^6 + 9x^5 + 4x^4 - 18x^3 + 22x^2 - x - 21$$

A operação de divisão é delicada. Dados os polinômios $p(x)$ e $d(x)$ (em que o grau de p é maior do que o de d), dividir $p(x)$ por $d(x)$ significa encontrar dois polinômios $q(x)$ e $r(x)$, denomidados quociente e resto, respectivamente, que satisfazem a relação:

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

E tais que o grau de $r(x)$ seja menor do que o de $d(x)$. A forma de dispor os polinômios para efetuar a divisão é a mesma que utilizamos para a divisão de números naturais.

$$\begin{array}{r|l} p(x) & d(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

Quando, na divisão de $p(x)$ por $d(x)$ o resto for o polinômio nulo, dizemos que $p(x)$ é divisível por $d(x)$ e, nesse caso, teremos conseguido uma fatoração do polinômio $p(x)$, escrevendo-o na forma $d(x) \cdot q(x)$.

Exercícios:

1. Dados os polinômios $A(x) = 6x^3 + mx^2 - \frac{2}{5}$, $B(x) = -2x^2 + 7x + n$ e $C(x) = px^3 - 7x - 1$ calcule m, n e p para que $C(x)$ seja a diferença entre $A(x)$ e $B(x)$ nessa ordem.

2. Considere os polinômios $p(x) = x^3 - x$ e $q(x) = 3x^4 + 6x^3 - x^2 + 2x - 4$. Calcule:

   a) $[p(x)]^2$

   b) $p(x) \cdot q(x)$

3. Obtenha o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ na divisão do polinômio $A(x)$ pelo polinômio $B(x)$ em cada caso:

   a) $A(x) = x^2 - 3x - 4$ e $B(x) = x + 1$

   b) $A(x) = 3x^3 + 9x^2 - 2x - 6$ e $B(x) = 3x^2 - 2$

   c) $A(x) = 12x^3 + 24x^2 - 13x + 6$ e $B(x) = 6x^2 - 3x + 1$

4. (FGV-SP) Seja $q(x)$ o quociente da divisão do polinômio $p(x) = x^6 - 1$ pelo polinômio $d(x) = x - 1$. Então, a alternativa correta é:

   a) $Q(0) = 0$.

   b) $Q(1) = 0$.

   c) $Q(-1) = 1$.

   d) $Q(1) = 6$.

   e) $Q(0) < 0$.

5. Considere o polinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, b e c reais dados. Verifique que $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

6. (Adaptado de Osec-SP) Sejam os polinômios $f(x) = ax^2 - 2x + 1$, $g(x) = x + 2$ e $h(x) = x^3 + bx^2 - 3x + c$. Os valores de a, b e c, tais que $f(x).g(x) = h(x)$ são?

Divisão por $x - a$

O caso mais importante da divisão de polinômios é o da divisão por $x - a$. Como o divisor é do grau 1, então o resto da divisão é apenas um número. Vamos mostrar agora que:

O resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$ é $p(a)$.

Para justificar, veja que, se o quociente é $q(x)$ e o resto é r, temos:

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$$

Fazendo $x = a$, temos $p(a) = (a - a).q(a) + r$, ou seja, $P(a) = r$. Como consequência, se $p(a) = 0$, concluímos que $p(x)$ é divisível por $x - a$.

Exercício resolvido: Encontre o resto da divisão de $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 1$ por $x - 2$.

Resolução: Temos que $p(2) = 2^3 - 5.2^2 + 7.2 + 1 = 8 - 20 + 14 + 1 = 3$
Para encontrar o quociente, devemos efetuar a divisão.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 5x^2 + 7x + 1 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 2x^2 & x^2 - 3x + 1 \\ \cline{1-1}
-3x^2 + 7x & \\
3x^2 - 6x & \\ \cline{1-1}
x + 1 & \\
-x + 2 & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}$$

Em seguida vamos encontrar uma fórmula prática de encontrar o quociente da divisão de um polinômio por x-a.

Exercícios:

1. Divida $x^3 - a^3$ por $x - a$ e conclua que $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

2. Confirme as seguintes identidades

   a) $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

   b) $x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$

4.2.1 O dispositivo de Briot-Ruffini

Para mostrar que esse dispositivo funciona, faremos a demonstração para divisão de um polinômio do terceiro grau por $x - a$. O caso geral é exatamente o mesmo. Consideremos,

então, a divisão de $p(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$ por $x - a$. Sejam: $q(x) = rx^2 + sx + t$ o quociente e r o resto. Temos:
$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$
$mx^3 + nx^2 + px + q = (x - a)(rx^2 + sx + t) + r$
$mx^3 + nx^2 + px + q = rx^3 + sx^2 + tx - arx^2 - asx - at + r$
$mx^3 + nx^2 + px + q = rx^3 + (s - ar)x^2 + (t - as)x - at + r$

Como os polinômios do lado esquerdo e do lado direito são idênticos, temos:

$$m = r, \text{ ou seja, } r = m$$
$$n = s - ar, \text{ ou seja, } s = ar + n$$
$$p = t - as, \text{ ou seja, } t = as + p$$
$$2\ q = -at + R, \text{ ou seja, } R = at + q$$

Assim, conseguimos calcular rapidamente os coeficientes do polinômio divisor e também o resto da divisão. O dispositivo de Briot-Ruffini mostra uma forma eficiente e prática de calcular os coeficientes.

	m	n	p	q
a	r	s	t	$\boxed{R}$

Observe, na linha de cima, os coeficientes do dividendo, embaixo os coeficientes do divisor, a posição da raiz do divisor (a) e o lugar onde fica o resto.
O procedimento passo a passo é o seguinte:

- Escreva os coeficientes de $P(x)$ na linha de cima.
- Repita o primeiro coeficiente (pois $r = m$).
- Calcule $am + n$ e ponha o resultado no lugar de s.
- Continue da mesma forma.

	m	n	p	q
a	m	$am + n$	$a^2m + an + p$	$\boxed{a^3m + a^2n + ap + q}$

Para mostrar um exemplo numérico, considere a divisão de $p(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x + 6$ por $x - a$. Faremos a divisão pelo dispositivo de Briot-Ruffini

	2	−3	0	−7	6
2	2	1	2	−3	$\boxed{0}$

Encontramos o quociente $q(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 3$ e o resto é zero.

Exercícios:

1. Efetue a divisão de $p(x) = x^2 + 4x + 4$ por $h(x) = x + 1$ utilizando o método dispositivo de Briot-Ruffini.

2. Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, assinale a alternativa que contém o quociente da divisão de $A(x) = 2x^3–4x + 1$ por $B(x) = x–4$.

   a) $x^3 - 3x^2 + 113$.

   b) $2x^2 + 8x + 28$.

   c) $-x^2 + 2x + 28$.

   d) $8x + 13$.

   e) 113.

3. Qual o valor de p que faz com que o resto da divisão de $p(x) = 3x^5 + 2x^4 + 3px^3 + x - 1$ por $x + 1$ seja 4?

Capítulo 5

Identidades e equações

Você sabe qual é a diferença entre uma identidade e uma equação? Uma identidade é uma igualdade que se verifica para todos os valores das variáveis. Por exemplo, são identidades:
a) $2x + 1 = 3 + x - 2 + x$
b) $(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$
Uma equação é uma igualdade que se verifica para apenas alguns valores das variáveis. Por exemplo, $\frac{3x+1}{2} = 8$ é uma equação, pois essa igualdade é correta apenas para x=5.

5.1 Raiz de uma equação

Um número é raiz de uma equação se torna a igualdade verdadeira quando substituído no lugar da variável (ou incógnita). Por exemplo, considerando a equação $x^2 - x = 2$, temos:

$$\begin{aligned}
&x = -1 \text{ é raiz, pois } (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2.\\
&x = 0 \text{ não é raiz, pois } 0^2 - 0 = 0 \neq 2.\\
&x = 1 \text{ não é raiz, pois } 1^2 - 1 = 0 \neq 2.\\
&x = 2 \text{ é raiz, pois } 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2.
\end{aligned}$$

Exercícios:

1. Determine a raíz das seguintes sentenças:

   a) $y = 4x - 8$

   b) $y = -7x + 21$

   c) $y = \frac{7}{3}x - 6$

   d) $y = -x$

2. Achar as raízes das equações:

   a) $x^2 - x - 20 = 0$

   b) $x^2 - 8x + 7 = 0$

5.2 Grau de uma equação

O grau de uma equação é o de seu termo de maior grau. Assim $x^2 - 2 = 2$ é uma equação de segundo grau e $x^5 + x^4 + 12x^2 + 1 = 0$ é uma equação de quinto grau.

Exercícios:

1) Diga qual é grau das seguintes equações:

a) $x^2 + 3x + 15 = 0$

b) $(x-4)^3 \cdot (x-8)^4 + 5x^{10} + 12x = 0$

c) $x + 2 = 0$

5.3 Princípios gerais para a solução de equações

1) Numa equação podemos transpor um termo (isto é, mudá-lo de um membro da equação para outro), desde que o multipliquemos por -1.
2) Uma equação não se altera quando se multiplicam ambos os membros por um número diferente de zero.

5.4 Equação do primeiro grau

A equação geral do primeiro grau $ax + b = 0$, onde a e b são números conhecidos e $a \neq 0$, se resolve de maneira simples: subtraindo b dos dois lados, obtemos $ax = -b$ e dividindo por a (dos dois lados), temos: $x = -\frac{b}{a}$.
No entanto, vale à pena deixar claro que o que deve ser feito é isolar o "x" de um dos lados da equação e deixar os demais valores do lado oposto, o que nos leva à solução do problema. Devemos esclarecer que há equações que não vão aparecer da exata maneira como no exemplo acima. Na verdade, a maior parte terá de sofrer uma pequena mudança na posição de seus termos para que fique com o aspecto de $ax + b = 0$.

Exercício resolvido: Resolva a equação $3x + 15 = 0$.

Resolução: Como a equação é do tipo $ax + b = 0$, pode se realizar os passos citados acima para a sua resolução.

Subtraindo 15 em ambos os lados, temos: $3x = -15$.
Dividindo por 3 em ambos os lados, temos: $x = -5$.

Exercícios: Resolva as questões abaixo.

1. O dobro de um número somado com 5 é igual a 91. Qual é esse número?

2. Qual é o número que adicionado a 28 é o mesmo que 3 vezes esse número?
3. Num estacionamento há carros e motos, totalizando 85 veículos. O número de carros é igual a 4 vezes o número de motos. Quantas motos há no estacionamento?
4. Quando Pedro nasceu, Guilherme tinha 3 anos. Atualmente a soma das idades é 23 anos. Qual é a idade de Guilherme?
5. O perímetro de um retângulo mede $100cm$. Quais são suas medidas, sabendo que o comprimento tem $10cm$ a mais que a largura?
6. Um número somado com sua metade é igual a 15. Qual é esse número?

5.5 Princípio de fator comum

Se uma equação pode ser colocada na forma $AB = AC$, então os dois membros possuem o fator A comum. O procedimento correto para a solução é transpor o termo AC para o primeiro membro e colocar o fator A em evidência, ficando com:

$$\begin{gathered} AB - AC = 0 \\ A(B - C) = 0 \end{gathered}$$

Um produto só é zero se pelo menos um dos fatores for zero. Então, concluímos que $A = 0$ ou $B - C = 0$, ou seja, $B = C$.

Exercício resolvido: Resolva a equação $4(x-2)-(x-2)(x+1)$ sem desenvolver os dois lados.

Resolução: Como existe o fator $x - 2$ nos dois lados da equação, vamos proceder como acabamos de mostrar:
$4(x - 2) - (x - 2)(x + 1) = 0$
$(x - 2)(4 - (x + 1)) = 0$
$(x - 2)(3 - x) = 0$
a) $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
b) $3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$

Portanto, essa equação possui duas raízes (ou duas soluções): $x = 2$ e $x = 3$.

Exercícios: Agrupe os termos semelhantes nas expressões e fatore-as pelo método do fator comum em evidência.

1. $ax^2 + 2ax – 3ax^2 + ax$
2. $3bm – 3bx - 3bn$
3. $2x^2y + 8xy – 4xyz$

5.6 Conjunto solução

Encontrar a solução de uma equação algébrica significa encontrar os valores das incógnitas que tornam a equação verdadeira. O conjunto de todas as respostas possíveis para uma equação é chamado conjunto verdade ou conjunto solução da equação. Ainda se pode dizer que o conjunto solução de uma equação é o conjunto de suas raízes. Se uma equação não possui raiz, seu conjunto solução é o conjunto vazio.

Exercício resolvido: Qual o conjunto solução da equação $4(x-2) = (x-2)(x+1)$, resolvida no item anterior?

Resolução: Como a equação já foi resolvida no item anterior, dizemos que seu conjunto solução é $S = \{(2,3)\}$.

Exercícios:

1. Resolva as seguintes equações do 1°grau e escreva o seu conjunto solução:

   a) $5x+2=12$

   b) $3(x+1) = 2(x+4)$

   c) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{2x}{3} = \dfrac{-11}{2}$

   d) $2x - \dfrac{3}{2} = \dfrac{2}{3}$

   e) $\dfrac{4x}{3} = \dfrac{1}{2}$

   f) $(x-1) = 5(x+1)$

2. Dada a equação $\dfrac{x+3}{x-3} - \dfrac{3}{5}$ então:

   a) $S = \emptyset$.

   b) $S = \{4\}$.

   c) $S = \{12\}$.

   d) $S = \{-12\}$.

   e) n.d.a.

3. O conjunto solução da equação $\dfrac{x-5}{x-3} = \dfrac{x+11}{x+3}$ é:

   a) $S = \{2\}$.

   b) $S = \{(1,8)\}$.

   c) $S = \left\{\dfrac{9}{5}\right\}$.

   d) $S = \{3\}$.

   e) $S = \{3,2\}$.

5.7 Módulos

O módulo de um número a é representado por $|a|$ e definido por:

$$|a| = \begin{cases} a & se \quad a \geq 0 \\ -a & se \quad a < 0 \end{cases}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} &|3| = 3, \text{ pois } 3 > 0 \\ &|-5| = -(-5) = 5, \text{ pois } 5 < 0 \\ &|0| = 0 \end{aligned}$$

É claro que, para qualquer número a, tem-se sempre $|a| \geq 0$. Também se deve observar que $\sqrt{a^2} = |a|$, para qualquer real a, como você poderá conferir nos exemplos a seguir:

$$\begin{aligned} &\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 = |3| \\ &\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4| \end{aligned}$$

Para resolver, por exemplo, a equação $|2x - 1| = 7$, devemos considerar dois casos: o número que está dentro do módulo ou é 7, ou é -7. Assim, temos:

$$\begin{aligned} &2x - 1 = 7 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \\ &2x - 1 = -7 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3 \end{aligned}$$

As raízes da equação são -3 e 4.

Não há dúvida de que, se tivéssemos $|2x - 1| = 0$, a solução seria simplesmente $2x - 1 = 0$, ou seja, $x = \frac{1}{2}$. Se, por outro lado, tivéssemos $|2x - 1| = -1$, estaríamos vendo uma equação impossível, pois o módulo de um número não pode ser negativo. As equações que mostraremos nos dois exercícios resolvidos a seguir são um pouco diferentes, pois o lado direito delas também contém a incógnita. Para resolver, usaremos a definição de módulo que exige a resolução de dois casos.

a) No primeiro caso, supomos que o número que está dentro do módulo seja positivo ou zero e, assim, o módulo pode ser retirado.
b) No segundo caso, supomos que o número que está dentro do módulo seja negativo. Ao retirar o módulo, devemos acrescentar um sinal negativo a ele, exatamente como na definição.

Exercício resolvido: Resolva a equação $|2x - 1| = x + 2$.
Resolução:
a) Supomos $2x - 1 \geq 0$, ou seja, $x \geq \frac{1}{2}$.
Nesse caso, o módulo pode ser retirado sem nenhuma modificação.

$2x - 1 = x + 2$

$x = 3$

Esse valor é uma raiz da equação, porque está de acordo com a hipótese inicial.

b) Supomos agora $2x - 1 < 0$, ou seja, $x < \frac{1}{2}$.

Nesse caso, ao retirarmos o módulo, devemos mudar o sinal.

$-(2x - 1) = x + 2$

$-2x + 1 = x + 2$

$-3x = 1$

$x = -\frac{1}{3}$

Esse valor também está de acordo com a hipótese inicial deste item (b).

Portanto, a equação tem duas raízes: $x = -\frac{1}{3}$ e $x = 3$.

Exercício resolvido: Resolva a equação $|x - 2| = 10 - 2x$.

Resolução:

a) Supomos $x - 2 \geq 0$, ou seja, $x \geq 2$.

$x - 2 = 10 - 2x$

$3x = 12$

$x = 4$ (esse valor é raiz, pois está de acordo com a hipótese do item)

b) Supomos $x - 2 < 0$, ou seja, $x < 2$.

$-(x - 2) = 10 - 2x$

$-x + 2 = 10 - 2x$

$x = 8$ (não é raiz,pois não está de acordo com a hipótese do item)

Portanto, a equação tem apenas uma raiz: $x = 4$.

Exercícios:

1. Resolva as seguintes questões em $\mathbb{R}$:

   a) $|x + 2| = 3$

   b) $|3x - 1| = 3$

   c) $|4x - 5| = 0$

   d) $|2x - 3| = -1$

   e) $|x| = 3$

   f) $|x| = -3$

2. (UFJF-MG) Sobre os elementos do conjunto solução da equação $|x^2| - 4|x| - 5 = 0$, podemos dizer que

a) são um número natural e inteiro.

b) são números naturais.

c) o único elemento é um número natural.

d) um deles é um número racional, o outro é um número irracional.

e) não existem, isto é, o conjunto solução é vazio.

3. (ENEM) Em uma gincana escolar, uma das etapas consistia na resolução de um desafio matemático. O professor forneceu uma série de informações acerca de um número Y. A primeira equipe que conseguisse determinar esse número venceria a prova. As informações eram as seguintes:
   • O número Y é natural.
   • O número $|Y-2|+4$ encontra-se a 10 unidades da origem da reta real.
   Acerca do número Y, podemos concluir que:

   a) é um número primo.

   b) possui 6 divisores naturais.

   c) é divisor de 56.

   d) é um número ímpar.

   e) é múltiplo de 3.

4. (ITA - SP) Considere a equação $|x| = x - 6$. Com respeito à solução real dessa equação, podemos afirmar que:

   a) a solução pertence ao intervalo $[1,2]$.

   b) a solução pertence ao intervalo $[-2,-1]$.

   c) a solução pertence ao intervalo $]-1,1[$.

   d) a solução pertence ao intervalo $[3,4]$.

   e) nenhuma resposta é correta.

5.8 Sistema de duas equações lineares

Os sistemas de duas equações e duas incógnitas aparecem frequentemente na resolução de problemas. Vamos mostrar, por meio de exemplos, os dois métodos principais que permitem resolvê-los facilmente, para que depois você decida qual deles mais lhe agradou.

5.8.1 Método da substituição

Este método consiste em escolher uma das equações, tirar o valor de uma das incógnitas e substituir na outra equação. Acompanhe:

$$\begin{aligned} 8x+3y &= 14 \\ 3y &= 14-8x \\ y &= \frac{14-8x}{3} \end{aligned}$$

Vamos agora substituir esse valor de y na segunda equação

$$\begin{aligned} &5x+2y=8 \\ &5x+2\cdot\frac{14-8x}{3}=8 \\ &3\cdot 5x+2(14-8x)=3\cdot 8 \\ &15x+28-16x=24 \\ &-x=-4 \\ &x=4 \end{aligned}$$

Tendo calculado uma das incógnitas, substituímos esse valor em qualquer uma das equações do sistema. Vamos então substituir $x=4$ na segunda equação:

$$\begin{aligned} &5\cdot 4+2y=8 \\ &2y=-12 \\ &y=-6 \end{aligned}$$

O sistema está resolvido. A solução é $x=4$ e $y=-6$.

5.8.2 Segundo método (eliminação)

Esse método consiste em planejar a eliminação de uma incógnita para calcular a outra. A eliminação de uma incógnita ocorre na soma das duas equações quando os coeficientes da mesma incógnita são simétricos. Veja novamente o sistema e acompanhe a solução:

$$\begin{cases} 8x+3y=14 \\ 5x+2y=8 \end{cases}$$

Para eliminarmos a incógnitas y, os dois coeficientes dessa incógnita devem tornar-se simétricos. Isso é possível multiplicando toda a primeira equação por 2 e toda a segunda equaçao por -3. Observe o que acontece:

$$\begin{aligned} &16x+6y=28 \\ &-15x-6y=-24 \end{aligned}$$

Somando essas equações, obtemos imediatamente $x=4$. Em seguida como no método anterior, substituímos esse valor em uma das equações para encontrar o valor de y.

O sistema possui uma única solução: $x = 4$, $y = 6$, também representada pelo par ordenado $(4,6)$, e o conjunto solução desse sistema é $S = \{(4,6)\}$.

Quando encontramos apenas uma solução, dizemos que o sistema é determinado.

Como dito, sistemas desse tipo aparecem com muita frequência na solução de problemas, principalmente os contextualizados.

Exercício resolvido: Um pacote de arroz e um pacote de feijão custam juntos R$ 9,00; dois pacotes de arroz e três de feijão custam R$ 20,00. Quanto custa um pacote de feijão?

Resolução:
Sejam:

$$x = \text{o preço do arroz}$$
$$y = \text{o preço do feijão}$$

Os dados do problema conduzem ao sistema:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases}$$

Usando a eliminação, multiplicado a primeira equação por -2 temos:

$$\begin{cases} -2x - 2y = -18 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases}$$

Somando as duas equações, encontramos y=2 e portanto $x = 7$.

Um sistema de duas incógnitas pode ainda ser impossível ou indeterminado.
O sistema impossível é o que não possui solução.
Um exemplo de sistema impossível é

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

Basta observar o sistema para concluir que, se $x + y = 2$, então $2x + 2y = 4$ e, portanto, essa última soma não pode dar 5. Logo, não existem x e y que satisfaçam as duas equações. O conjunto solução desse sistema é o conjunto vazio.

O sitema inderteminado é o que possui infinitas soluções.

Um exemplo de sistema inderteminado é

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$

Veja que a segunda equação é igual à primeira multiplicada por 3. Assim, a segunda equação não é uma nova equação, é apenas a repetição da primeira. Assim, todos os valores de x,y que satisfazem a primeira equação também satisfarão a segunda.

Algumas soluções desse sistema são: $(2,0)$,$(1,1)$,$(0,2)$,$(-1,3)$ etc.
Cada vez que escolhermos um valor para x, o valor para y, será $2-x$. Portanto, o conjunto solução desse sistema é $S = \{(t, 2-t); t \in \mathbb{R}\}$

Exercícios:

1. (Fuvest) Um supermercado adquiriu detergentes nos aromas limão e coco. A compra foi entregue, embalada em 10 caixas, com 24 frascos em cada caixa. Sabendo-se que cada caixa continha 2 frascos de detergentes a mais no aroma limão do que no aroma coco, o número de frascos entregues, no aroma limão, foi?

   a) 110

   b) 120

   c) 130

   d) 140

   e) 150

2. (Vunesp) Em um campeonato de futsal, se um time vence, marca 3 pontos; se empata, marca 1 ponto e se perde não marca nenhum ponto. Admita que, nesse campeonato, o time **A** tenha participado de 16 jogos e perdido apenas dois jogos. Se o time **A**, nesses jogos, obteve 24 pontos, então a diferença entre o número de jogos que o time A venceu e o número de jogos que empatou, nessa ordem, é?

3. (Unicamp) Encontre todas as soluções do sistema:

$$\begin{cases} \sin x + y = 0 \\ \sin x - y = 0 \end{cases}$$

   que satisfaça a desigualdade $0 \leqslant x \leqslant \pi$ e $0 \leqslant y \leqslant \pi$

4. (Mauá) Para que valores de k o sistema abaixo é possível e determinado?

$$\begin{cases} kx + 3y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

5. (FGV) Resolvendo o sistema abaixo, se obtem qual valor para z?

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 1 \\ 6y + 3z = -12 \end{cases}$$

6. (Fuvest) Considere o sistema linear nas incógnitas x, y, z, w:

$$\begin{cases} my + 2x = -2 \\ x + y = -1 \\ 2w + y + zm = 2 \\ -w + z = 1 \end{cases}$$

   a) Para que valores de m, o sistema tem uma única solução?

   b) Para que valores de m, o sistema não tem solução?

   c) Para $m = 2$, calcule o valor de $2x + y - z - 2w$.

7. (UERJ) Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas; outras, por apenas 2 pessoas, num total de 38 fregueses. O número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas é?

5.9 Equação de segundo grau

A equação do segundo grau tem forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que o coeficiente a não é zero. Essa equação está presente em inúmeros problemas em diversas áreas da matemática. Existe uma fórmula que resolve qualquer equação desse tipo, a dedução dessa fórmula será feita completando um quadrado perfeito.

Consideramos o problema de resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Vamos completar o quadrado, primeiro, multiplicando toda a equação por $4a$. A equação então fica dessa forma:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Preparamos então o completamento do quadrado:

$$4a^2x^2 + 4abx + ... = ... - 4ac$$

Observe que o termo b^2 completa o quadrado perfeito:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Ficamos com:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extraindo a raiz quadrada, ficamos com:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Agora é só isolar x:

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Essa é uma das fórmulas mais famosas e úteis da matemática. Todos devem sabê-la.
O número embaixo do radical é chamado de discriminante da equação e representado pela letra grega Δ (Delta maiúsculo): $\Delta = b^2 - 4ac$. Esse número, por estar embaixo de uma raiz quadrada, nos informa que:

Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes;
Se $\Delta = 0$, a equação possui apenas uma raiz;
Se $\Delta < 0$, a equação não possui raiz alguma no conjunto dos reais.

Exercício resolvido: Encontre as raízes da equação $x^2 - 4x - 3 = 0$.

Resolução: Aplicando a fórmula, ficamos com:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

As raízes são $x_1 = 2 - \sqrt{7}$ e $x_2 = 2 + \sqrt{7}$.

5.9.1 Relação entre coeficientes e raízes da equação do segundo grau

Os coeficientes a, b, c da equação $ax^2 + bx + c = 0$ nos dão informações úteis sobre suas raízes. Para descobrir, vamos ter de efetuar alguns cálculos. Se $a \neq 0$, as duas raízes da equação

$ax^2 + bx + c = 0$ são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Somando as duas raízes, obtemos:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \Delta}{2a} = \frac{-2b}{-2a} = -\frac{b}{a}$$

Multiplicando as duas raízes, obtemos:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Conseguimos encontrar os seguintes e importantes resultados sobre as raízes x_1 e x_2 da equação $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\text{A soma das raízes é: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\text{O produto das raízes é: } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Essas relações permitem encontrar uma equação do segundo grau que possui raízes dadas. Observe que, considerando a equação $ax^2 + bx + c = 0$, dividindo por a ficamos com:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ou

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

Agora, representando por S a soma das raízes e por P o produto delas, a equação se torna:

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Assim, dados dois números reais quaisquer, podemos encontrar uma equação do segundo grau que possui essas raízes. Por exemplo, se desejamos uma equação cujas raízes são -3 e 7, basta calcular $S = -3 + 7 = 4$ e $P = (-3) \cdot 7 = -21$. Portanto, uma equação que possui essas raízes é $x^2 - 4x - 21 = 0$.

5.9.2 Equação do segundo grau com coeficientes inteiros

Na equação $ax^2 + bx + c = 0$, se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ for positivo, teremos duas raízes reais:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

que podemos escrever assim:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

ou ainda:

$$x_1 = A + \sqrt{B} \quad \text{e} \quad x_2 = A - \sqrt{B}$$

Portanto, se numa equação com coeficientes inteiros o discriminante não é um quadrado perfeito, as duas raízes da equação possuem a forma acima. Por exemplo, se numa equação de coeficientes inteiros uma das raízes for $2+\sqrt{3}$, a outra será necessariamente $2-\sqrt{3}$. Nesse caso, a soma será $S = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 4$ e o produto $P = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1$. Uma equação possível será $x^2 - 4x + 1 = 0$. Recomendamos, como exercício, que você resolva essa última equação para observar suas raízes.

5.9.3 Equações irracionais

Uma equação é chamada de irracional quando a incógnita aparece embaixo de uma raiz. Por exemplo, são equações irracionais $\sqrt{5x+1} = x - 7$ e $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x+6} = 1$.
Para resolver uma equação irracional, devemos elevar os dois membros a uma potência conveniente, ás vezes mais de uma vez, até que os radicais desapareçam. Sempre que elevamos uma equação ao quadrado, devem-se verificar os resultados encontrados porque raízes estranhas à equação dada podem aparecer. Vamos desenvolver um exemplo para esclarecer essas coisas.

Exercício resolvido: Resolva a equação $\sqrt{5x+1} = x - 7$.
Resolução: Elevamos os dois lados ao quadrado e fazemos as contas:

$$(\sqrt{5x+1})^2 = (x-7)^2$$
$$5x + 1 = x^2 - 14x + 49$$
$$x^2 - 19x + 48 = 0$$
$$x = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4\cdot 1\cdot 48}}{2\cdot 1} = \frac{19 \pm \sqrt{361-192}}{2} = \frac{19 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{19 \pm 13}{2} = \begin{cases} \dfrac{19+13}{2} = 16 \\ \dfrac{19-13}{2} = 3 \end{cases}$$

Encontramos dois valores para x, mas isso não quer dizer que esses valores sejam raízes da

equação original. É preciso fazer uma verificação.
Se $x = 16$, temos, substituindo na equação dada, $\sqrt{81} = 9$, que é correto.
Se $x = 3$, temos, substituindo na equação dada, $\sqrt{16} = -4$, que é falso.
Portanto, apenas o primeiro valor é raiz da equação. Logo a única raiz da equação é $x = 16$.

Exercícios

1. Os números m e n são as raízes da equação $x^2 - 2rx + r^2 - 1 = 0$. Qual o valor de $m^2 + n^2$?

2. Se x e y são números reais tais que $2x + y = 8$, qual o valor máximo do produto xy?

3. Quando o polinômio $x^2 + x - a$ tem raízes iguais?

4. (Mackenzie) Se x e y são números naturais tais que $y = \dfrac{x^2+3}{x+2}$, qual valor de $x + y$?

5. (Unesp) Dada a equação $x^2 + x - \sqrt{2} = 0$, calcule a soma dos inversos de suas raízes.

6. A soma de dois números é 6, e a soma de seus quadrados é 68. O módulo da diferença desses dois números é?

7. (FGV) A soma das raízes da equação $(x^2 - 2x\sqrt{2} + \sqrt{3})(x^2 - x\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 0$ vale?

8. Determine os valores possíveis para m de modo que a equação $(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ tenha duas raízes reais, tais que $-1 < x_1 < 4 < x_2$.

9. Considere a, b e c números reais tais que $a < b < c$. Prove que a equação

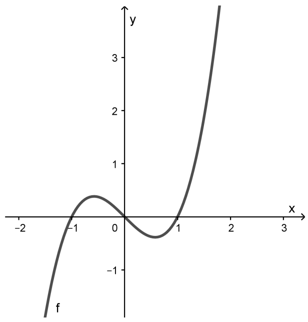
$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

possui exatamente duas raízes x_1 e x_2 que satisfazem a condição $a < x_1 < b < x_2 < c$.

5.10 Inequações

A inequação é uma desigualdade expressa na forma: $f(x) > c$, $f(x) < c$, $f(x) \geq c$ ou $f(x) \leq c$. Sendo f a função dada e c um número real, a solução de uma inequação é o conjunto de todos os valores para x que a satisfazem. Observe o gráfico de f (Figura 1). Neste exemplo f é uma função polinomial de grau 3. A solução para a inequação $f(x) > c$ é o conjunto dos valores de x em que o gráfico está acima da reta $y = c$.

Nesse caso, a solução da inequação $f(x) > 0$ é $\{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 0x > 1\}$. Pode-se escrever: $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.



5.10.1 Regras básicas para resolver inequações

1. Adicionar o oposto em ambos os lados da desigualdade:
   Ao adicionar o oposto em ambos os lados, o elemento muda de sinal, mas o sentido da desigualdade se mantem.
   Exemplo: $x - a < 0 \Rightarrow x - a + a < 0 + a \Rightarrow x < a$.

2. Multiplicar por um número positivo:
   Ao efetuar a multiplicação em ambos os lados por um número positivo, o sentido da desigualdade é mantido.
   Exemplo: $\frac{x}{6} < a \Rightarrow x < 6a$.

3. Multiplicar por um número negativo:
   Ao efetuar a multiplicação em ambos os lados por um número negativo, o sentido da desigualdade é invertido.
   Exemplo: $-x < a \Rightarrow x > -a$.

4. Inverter:
   Ao inverter dois lados positivos de uma desigualdade, o seu sentido também é invertido.
   Exemplo: considere $x > 0$ e $a > 0$ temos $\frac{1}{x} < a \Rightarrow x > \frac{1}{a}$.

Observação: $a < x = x > a$.

5.10.2 Inequação do primeiro grau

Para encontrar a solução de uma inequação do primeiro grau é necessário utilizar as regras básicas.
Exercício resolvido: Seja a expressão $x - 1 \leq \frac{x+2}{4}$, encontre o conjunto solução de x.

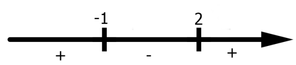
Resolução:

$$\begin{aligned}
&4x-4 \le x+2\\
&4x-x \le 2+4\\
&3x \le 6\\
&x \le 2\\
&\{x \in \mathbb{R}; x \le 2\}.
\end{aligned}$$

5.10.3 Inequação do segundo grau

As inequações de segundo grau, com $a \neq 0$, em sua forma geral, são expressas na forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c \ge 0$ ou $ax^2+bx+c \le 0$. Para encontrar a solução das inequações de segundo grau é necessário realizar o estudo do sinal do polinômio de segundo grau.

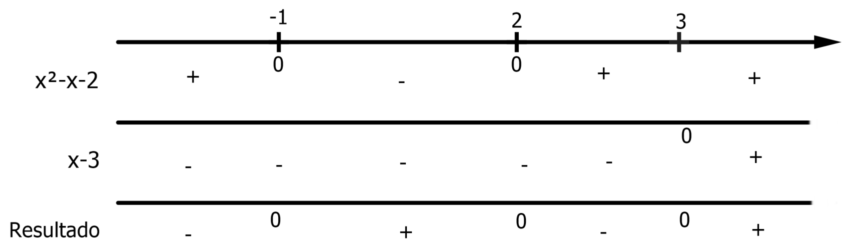
Exemplo: considere a inequação $x^2-x-2 \le 0$. Temos que $a>0$ e que suas raízes são -1 e 2 (figura 4). Sendo a assim, a solução para essa inequação é $\{x \in \mathbb{R}; -1 \le x \le 2\}$.



5.10.4 Inequações produto e quociente

Para encontrar a solução de qualquer inequação produto e quociente é necessário analisar o quadro de sinais. Vamos estudar a partir de exemplos:
Para resolver a inequação produto $(x^2-x-2)(x-3)>0$ vamos fazer um quadro de sinais para cada equação e mais um terceiro que será o produto dessas duas, o resultado da inequação (Figura 5.1). Sabemos que as raízes de $x^2-x-2=0$ são -1 e 2 e que $a>0$. Sabemos que a raiz de $x-3=0$ é 3 e que $a>0$.

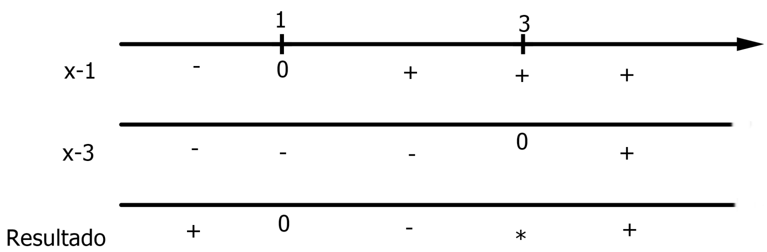
Figura 5.1:



Ao analisar o quadro de sinais do produto das raízes das duas funções, e sabendo que a inequação $(x^2 - x - 2)(x - 3) > 0$ exige resultados positivos, conclui-se que os valores assumidos por x são todos os reais entre -1 e 2 e os reais maiores que 3: $(-1, 2) \cup (3, +\infty)$.

Para resolver a inequação quociente $\dfrac{x-1}{x-3} \geq 0$ se realiza o estudo do sinal da mesma forma. Entretando é necessário atenção para excluir a raiz do denominador no resultado que aqui será representada por $*$.(Figura 5.2)

Figura 5.2:



Diante disso, a solução para a inequação $\dfrac{x-1}{x-3} \geq 0$ é $\{x \in \Re e; x \leq 1 x > 3\}$, ou $(-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$.(incluir ref autor ano do livro da prof pq é mesmo ex)

5.10.5 Exercícios

1. (Iezzi, 1977): resolva a inequação: $x^2 - 2x + 2 > 0$.

2. (Iezzi, 1977): resolva a inequação: $(1 - 4x^2)(2x^2 + 3x) > 0$.

3. (Iezzi, 1977): resolva a inequação: $\dfrac{2x^2+x-1}{2x-x^2} \leq 0$.
4. (Iezzi, 1977): resolva a inequação: $\dfrac{2x+1}{x+2} > 0$.
5. (livro da prof): resolva a inequação $\dfrac{2x-5}{x-1} \leq 1$.
6. (livro da prof): resolva a inequação $\dfrac{3}{x+2} \leq x$.

Capítulo 6

Funções

Em diversas situações do dia a dia é possível perceber grandezas que estão relacionadas. Sendo assim, muitas dessas relações podem ser descritas por um conceito matemático denominado função. Nesse sentido, estudaremos no corrente capítulo algumas particularidades das funções algébricas que serão fundamentais para compreender outras situações do cotidiano.

6.1 Introdução

Definição: São dados dois conjuntos A e B. Uma função de A em B consiste em alguma regra que permita associar, a cada elemento de A, um único elemento de B.
Assim, em termos matemáticos, dado uma função f, a expressão "função f de A em B", representaremos da seguinte forma:

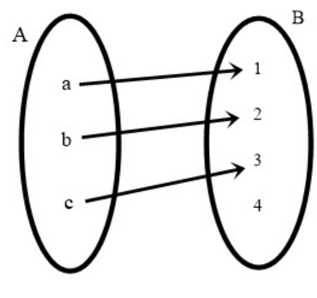
$$f : A \longrightarrow B$$

Observaremos agora duas condições que devem ser satisfeitas para que uma relação f de A em B seja função.

1. é necessário que todo elemento de A participe de pelo menos um par $(x, y) \in f$;
2. é necessário que cada elemento de A participe de apenas um único par $(x, y) \in f$.

Podemos visualizar de uma maneira mais objetiva, a partir do diagrama de flechas (Figura 6.1):

Figura 6.1:



6.1.1 Domínio, contradomínio e imagem

Ao considerarmos uma função $f : A \longrightarrow B$, vamos perceber que ela terá algumas particularidades, dentre elas, o domínio, contradomínio e imagem. Com isso, temos que:

Domínio

Definição: Na função $f : A \longrightarrow B$, o conjunto A é denominado domínio da função, ou seja:

$$D(f) = A$$

Lê-se: o domínio da função f é igual ao conjunto A.

Contradomínio

Definição: Na função $f : A \longrightarrow B$, o conjunto B é denominado contradomínio da função, ou seja:

$$CD(f) = B$$

Lê-se: o contradomínio da função f é igual ao conjunto B.

Imagem

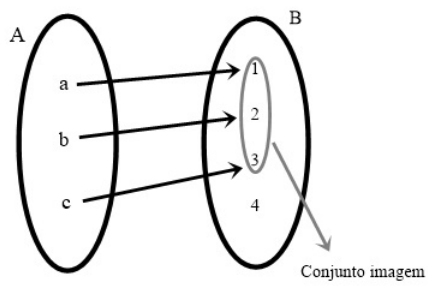
Definição: Na função $f : A \longrightarrow B$, o conjunto formado pelos elementos do conjunto B, que estão em correspondência com os elementos do conjunto A, recebe o nome de imagem da função, ou seja:

$$Im(f) \subset B$$

Lê-se: o conjunto imagem da função f está contido no contradomínio B.

Assim, voltando ao exemplo inicial, por meio do diagrama de flechas (Figura 6.2), podemos verificar a representação.

Figura 6.2:



Exercício resolvido: Dados os conjuntos $A = \{ \text{-2, -1, 0, 1} \}$ e $B = \{ \text{-5, -2, 1, 4, 5, 6} \}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x + 1\}$:

a) Determinar a relação R em forma de pares ordenados;

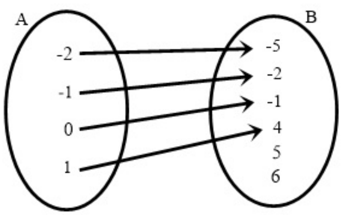
b) Contruir um diagrama de flechas;

c) Verificar se essa relação é uma função. Em caso afirmativo determinar os conjuntos $D(f), CD(f)$ e $Im(f)$.

Resolução:

a) Como $y = 3x + 1$, então:
$x = -2 \Rightarrow y = 3 \cdot (-2) + 1 = -6 + 1 = -5 \in B$, então $(-2, -5) \in R$
$x = -1 \Rightarrow y = 3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = -2 \in B$, então $(-1, -2) \in R$
$x = 0 \Rightarrow y = 3 \cdot (0) + 1 = 0 + 1 = 1 \in B$, então $(0, -1) \in R$
$x = 1 \Rightarrow y = 3 \cdot (1) + 1 = 3 + 1 = 4 \in B$, então $(1, 4) \in R$
Assim, $R = \{(-2, -5), (-1, -2), (0, 1), (1, 4)\}$.

b) O diagrama correpondente é:



c) A relação R é função de A em B, pois a cada elemento de A corresponde um único elemento de B. Assim, $D(f) = A$, $CD(f) = B$ e $Im(f) = \{-5, -2, 1, 4\}$.

6.1.2 Raiz ou zero de uma função

Dada uma função f de A em B, a raiz (ou zero) da função f é todo elemento de A cuja imagem é zero. Isto é:

$$f(x) = 0$$

Exemplos: Na função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 6$, temos que -3 é a raiz de f, pois $f(-3) = 2 \cdot (-3) + 6 = -6 + 6 = 0$.

6.1.3 Função injetora, sobrejetora e bijetora

Injetora

Definição: Uma função $f : A \longrightarrow B$ é injetora (ou injetiva) se dois elementos distintos quaisquer de seu domínio possuem imagens diferentes. Ou seja,

$$\forall x_1 \text{ e } x_2 \in A, \text{ se } x_1 \neq x_2, \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2)$$

Exemplos: A função $f(x) = x^2 - x$ não é injetora, pois tomamos $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, temos que $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$, respectivamente. Assim, notamos que $x_1 \neq x_2$, mas $f(x_1) = f(x_2)$, o que não condiz com a nossa definição.

Sobrejetora

Definição: Uma função $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetora (ou sobrejetiva) se todo elemento de B é imagem de algum elemento de A. Ou seja,

$$\{ \forall y \in B, \exists x \in A \mid f(x) = y \}$$

Exemplos: A função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - x$ não é sobrejetora, pois nem todo elemento do contradomínio está na imagem da função. Consideramos $f(x) = -1$, se $x^2 - x = -1$, então $x^2 - x + 1 = 0$. Mas essa equação não tem solução, porque seu discriminante é negativo. Assim, não existe x tal que $f(x) = -1$.

Bijetora

Definição: Uma função $f : A \longrightarrow B$ é bijetora (ou bijetiva), quando é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.

6.1.4 Funções crescente e decrescente

Definição 1: Dizemos que uma função é crescente quando em todo seu domínio, aumentado seu valor de x, o valor de y também aumentará.

Definição 2: Vamos considerar uma função decrescente quando em todo seu domínio, aumentado seu x, o valor de y diminuirá.

6.1.5 Função par e função ímpar

Função par

Será uma função par a relação onde o elemento simétrico do conjunto do domínio tiver a mesma imagem no conjunto de chegada. Ou seja, uma função será par se:

$$f(x) = f(-x)$$

Por exemplo, a função $A \longrightarrow B$, com $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 5\}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ é uma função par, pois $f(-2) = 5$ e $f(2) = 5$, ou seja, possuem a mesma imagem.

Função ímpar

Será uma função ímpar a relação onde os elementos simétricos do conjunto do domínio terão imagens simétricas no conjunto de chegada. Ou seja, uma função será ímpar se:

$$f(-x) = -f(x)$$

Por exemplo, a função $A \longrightarrow B$, com $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-10, -5, 0, 5, 10\}$ definida por $f(x) = 5x$ é uma função ímpar, pois $f(-2) = -10$ e $f(2) = 10$, ou seja, possuem imagens simétricas.

Exercícios:

1. Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Represente as relações a seguir por meio de diagramas de flechas e indique qual delas é uma função de A em B.

   a) $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x - 1\}$

   b) $g = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$

   c) $h = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 2\}$

2. (Adaptado - UEL) Adotando o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), qual das alternativas representa o domínio, contradomínio e imagem, respectivamente, da relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = -2x + 8\}$.

   a) $\{1, 3, 5, 7\}$, $\mathbb{N}$, $\{1, 2, 3\}$.

   b) $\mathbb{N}$, $\{8\}$, $\{2, 4, 6\}$.

   c) $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$, $\{2, 4, 6\}$.

   d) $\{8\}$, $\mathbb{N}$, $\{2, 4, 6\}$.

3. Encontre o domínio das seguintes funções:

   a) $p(x) = x^3 - x$

   b) $d(x) = \dfrac{x + 3}{x - 8}$

   c) $f(a) = \sqrt[3]{2a - 6}$

4. (UEL) Por definição, zero de uma função é o ponto do domínio de f onde a função se anula. Definidas as quatro funções: $f(x) = 3x - 8$, $g(x) = 2x + 6$, $h(x) = x - 1$ e $i(x) = 15x - 30$, qual dos conjuntos contém os zeros de todas as funções.

   a) $\{-8, 2, -1, -30\}$.

   b) $\left\{\dfrac{8}{3}, -3, 1, 2\right\}$.

   c) $\left\{-\dfrac{8}{3}, 2, -1, -2\right\}$.

   d) $\left\{2, \dfrac{8}{3}, 3, 30\right\}$.

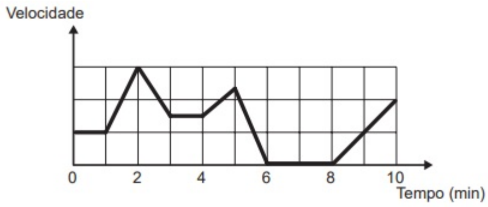
5. Em cada caso, calcule k para que 10 seja uma raiz da função h.

   a) $h(x) = x + k$

   b) $h(x) = kx - 8$

   c) $h(x) = (x - 2k) \cdot (x + 2k)$

6. (Adaptado - ENEM/2017) Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento. Identifique, em quais intervalos de tempo, a representação gráfica é crescente e decrescente.



7. (UFRGS - 2019) Considere as seguintes afirmações sobre quaisquer funções f reais de variável real.
   I. Se $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, então $f(x) > 0$.
   II. Se $f(x) = 0$, então x é zero da função $f(x)$.
   III. Se x_1 e x_2 são números reais, com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.
   Quais são corretas?

   a) Apenas a I.

   b) Apenas a II.

   c) Apenas a III.

   d) Apenas I e II.

   e) I, II e III.

8. A função $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$, definida em $\mathbb{R} - \{0\}$ é par? Justifique sua resposta.

6.2 Função Afim

Definição: A função afim (ou função polinomial do primeiro grau) é a função dada por $f(x) = ax + b$ em que $a \neq 0$ (ou ainda $y = ax + b$), com a e b números reais. Além disso, denominamos a e b como coeficientes da função. O coeficiente a chamamos de coeficiente angular e o coeficiente b denominamos coeficiente linear.

6.2.1 Representação gráfica

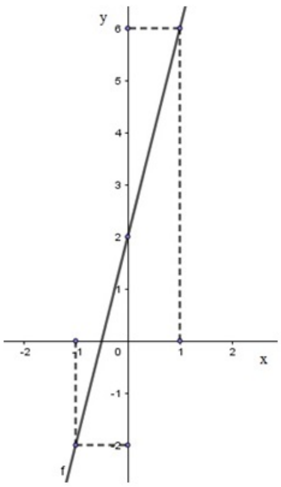
A representação gráfica de uma função polinomial do primeiro grau, $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$, é uma reta não paralela aos eixos x e y, sendo que a raiz da nossa função é o ponto em que intesecciona o eixo x, e o nosso coeficiente linear, determina o ponto em que a reta passa pelo eixo y. A construção do gráfico pode ser feita de duas formas:

1. Atribuindo valores para a variável x, substituindo na função dada, encontramos os valores de y, correspondentes;

2. Localizando no plano cartesiano os pontos (x, y) e por eles, traçar uma reta.

Exemplos: Vamos construir o gráfico da função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x + 2$. Para isso, em um primeiro momento, vamos definir alguns valores para a variável x, posteriormente, construímos a tebela:
$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4 \cdot (-1) + 2 \Rightarrow f(-1) = -2$
$x = 0 \Rightarrow f(0) = 4 \cdot (0) + 2 \Rightarrow f(0) = 2$
$x = 1 \Rightarrow f(1) = 4 \cdot (1) + 2 \Rightarrow f(1) = 6$

x	f(x)
-1	-2
0	2
1	6



6.2.2 Características importantes da função afim

Domínio

O domínio da função afim é o conjunto dos números reais, ou seja:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Imagem

O conjunto imagem da função afim é o conjunto dos números reais, ou seja:

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Crescimento e decrescimento

A função afim será crescente em $\mathbb{R}$ quando $a > 0$, e consequentemente, quando $a < 0$ a função é decrescente em $\mathbb{R}$.

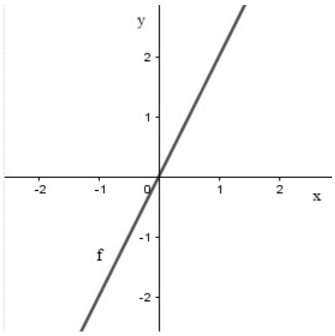
6.2.3 Casos particulares

Função Linear

A função afim em que o termo b é nulo, chamaremos de função linear e sua forma algébrica é dada por:

$$f(x) = ax$$

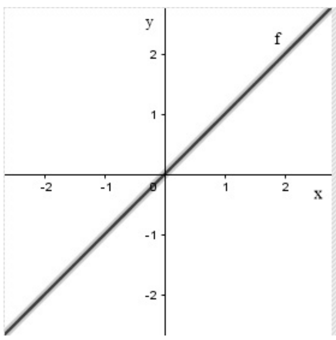
Por exemplo, $f(x) = \sqrt{2}x$.



Função identidade

Denominaremos de função identidade quando o coeficiente linear é nulo e o coeficiente angular é igual a 1. Assim, sua forma algébrica é dada por:

$$f(x) = x$$

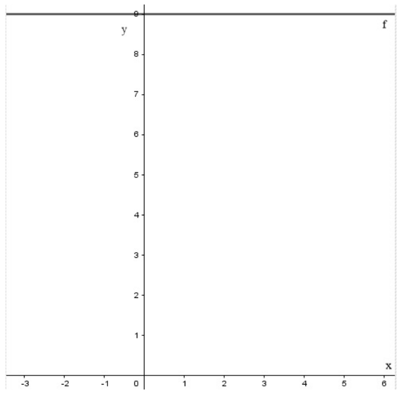


Função constante

Nesse caso, o nosso coeficente angular será nulo na expressão $f(x) = ax + b$ e o coeficiente linear será um número real qualquer. Algebricamente, representamos por:

$$f(x) = b$$

Um exemplo de função constante é $f(x) = 9$.



6.2.4 Raiz ou zero da função afim

Como já sabemos a definição de raiz de uma função, aqui na função afim tudo segue do mesmo jeito. Sendo assim, como fazemos para encontrar o zero de uma função afim algebricamente? É muito simples, tendo a lei da nossa função, vamos igualar ela a zero.
Exemplos: Seja a função $y = 2x - 4$, para obtermos sua raiz, faremos $y = 0$.
Então, $2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \dfrac{4}{2} \Rightarrow x = 2$. Sendo assim, 2 é a raiz da nossa $f(x)$.

6.2.5 Estudo dos sinais da função afim

O estudo dos sinais da função afim, $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$, consiste em analisar o comportamento dos valores de x para que: $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ e $f(x) < 0$. Nesse sentido, quando:

1. $a > 0$
   $f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > \frac{-b}{a}$

   $f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < \frac{-b}{a}$

2. $a < 0$
   $f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < \frac{-b}{a}$

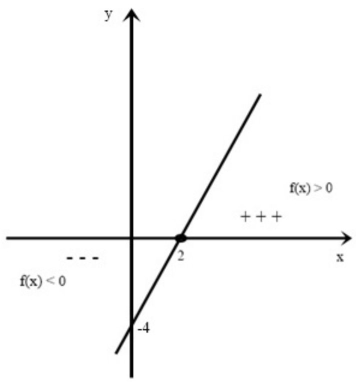
   $f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x > \frac{-b}{a}$

Vejamos agora, um exercício resolvido para melhor compreensão.

Exercício resolvido: Dada a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 4$, analise o comportamento de f em que $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ e $f(x) < 0$.

Resolução: Começamos analisando o coeficiente angular, assim, podemos perceber que

$a = 2 \Rightarrow a > 0$, portanto, a função é crescente. No segundo momento, encontramos a raiz da função f, então, $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$. Graficamente, representamos da seguinte maneira:



Exercícios:

1. Classifique cada função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ em afim, linear, constante ou identidade.

   a) $f(x) = \dfrac{3}{2}x - 5$

   b) $f(x) = x$

   c) $f(x) = -3x$

   d) $f(x) = -5$

   e) $f(x) = 15 - \dfrac{4}{5}x$

2. Calcule o zero de cada função.

   a) $f(x) = 3x - 12$

   b) $f(x) = -\dfrac{1}{5}x - 5$

3. (Adaptado - UFPI) A função de variável real, definida por $f(x) = (3-2a)x+2$, é crescente quando:

   a) $a > 0$. b) $a < \dfrac{3}{2}$. c) $a = \dfrac{3}{2}$. d) $a > \dfrac{3}{2}$. e) $a < 3$.

4. (Adaptado - FGV) O gráfico da função $f(x) = mx + n$ passa pelo pontos $(-1, 3)$ e $(2, 7)$. O valor de m é:

   a) $\dfrac{5}{3}$. b) $\dfrac{4}{3}$. c) 1. d) $\dfrac{3}{4}$. e) $\dfrac{3}{5}$.

5. Dadas as funções $f(x) = -3x + 15$ e $g(x) = 4x - 8$, determine os valores de x em que ambas assumem valores positivos.

6. Um estacionamento oferece duas opções de preço para seus clientes:
   Estacionamento A: R$ 4,00 fixo mais R$ 0,50 por hora
   Estacionamento B: R$ 1,50 por hora
   Quais os intervalos de tempo em que cada opção é mais vantajosa?

7. (Adaptado - UFCE) A função $f(x) = ax + b$ é tal que $f(3) = 0$ e $f(4) > 0$. Pode-se afirmar que:

   a) $a < 0$.   b) $f(2) > 0$.   c) $f(0) = 0$.

   d) f é constante.   e) f é crescente em todo seu domínio.

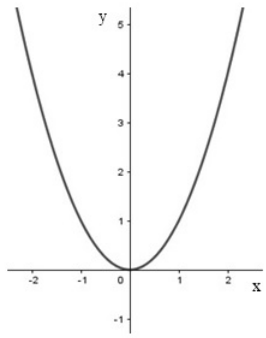
6.3 Função quadrática

Definição: A função quadrática (ou função polinomial do segundo grau) é a função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ em que $a \neq 0$, com a, b e c números reais. Além disso, denominamos a, b e c como coeficientes da função.

6.3.1 Representação gráfica

A representação gráfica da função quadrática é uma curva que denominamos de parábola (Figura 6.3). Assim, semelhante à função afim, podemos construir o gráfico utilizando a ideia de pares ordenados em um plano cartesiano, ademais o domínio e contradomínio de f é o conjunto dos números reais.

Figura 6.3:



6.3.2 Coeficientes da função quadrática

Analisando os coeficientes de uma função quadrática, obtemos informações que nos auxiliam a esboçar o gráfico. Ou seja, podemos perceber se a concavidade da parábola é voltada para cima ou voltada para baixo. Para isso, verificamos o sinal do coeficiente a.

1. Se $a > 0$, então a parábola terá concavidade voltada para cima;

2. Se $a < 0$, então a parábola terá concavidade voltada para baixo.

Além disso, o gráfico da função quadrática, intersecciona o eixo y quando:

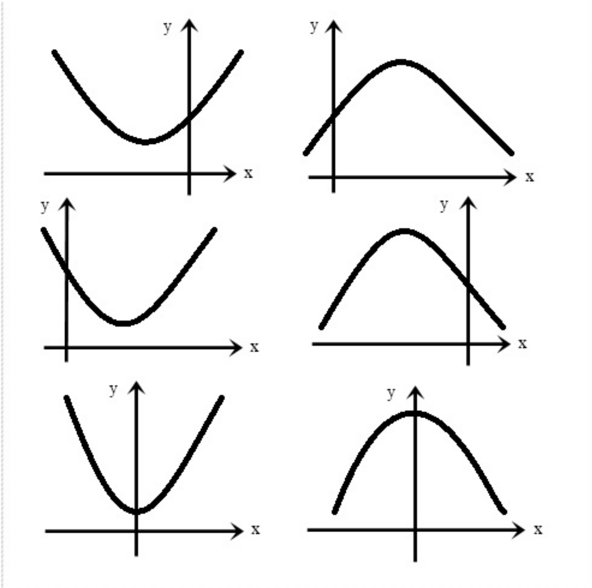
1. No ramo crescente se $b > 0$;

2. No ramo descrescente se $b < 0$;

3. No vértice se $b = 0$.

Observe a representação gráfica (Figura 6.4), respectivamente:

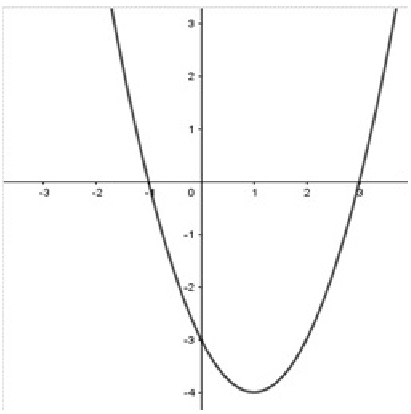
Figura 6.4:



Tratando do coeficiente c, ele faz o papel do coeficiente linear da função afim. Isto é, o gráfico intersecciona o eixo y no ponto de coordenadas $(0, c)$.

Exercício resolvido: Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Resolução: Para isso, em um primeiro momento, vamos definir alguns valores para a variável x, posteriormente, construímos a tebela:
$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 \Rightarrow f(-1) = -4$
$x = 0 \Rightarrow f(0) = (0)^2 - 2 \cdot (0) - 3 \Rightarrow f(0) = -3$
$x = 1 \Rightarrow f(1) = (1)^2 - 2 \cdot (1) - 3 \Rightarrow f(1) = -4$



x	f(x)
-1	-4
0	-3
1	-4

6.3.3 Raizes ou zeros da função quadrática

Estudamos anteriormente que o zero de uma função f é todo o valor de x de seu domínio tal que $f(x) = 0$ e que, graficamente, os zeros correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico interseciona o eixo x.
Para determinamos os zeros de uma função quadrática, fazemos $f(x) = 0$ e resolvemos a equação do segundo grau.
Essa equação pode ser resolvida utilizando a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ na qual } \Delta = b^2 - 4ac$$

De acordo com os coeficientes da função, temos três possíveis casos para os valores de Δ.

1. $\Delta > 0$

   a) a equação $ax^2 + bx + c = 0$, possui duas raízes reais e distintas;

   b) a função $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ possui dois zeros reais e distintos;

   c) a parábola relacionada a f intersecciona o eixo x nos pontos de coordenadas $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

2. $\Delta = 0$

   a) a equação $ax^2 + bx + c = 0$, possui duas raízes reais e iguais;

   b) a função $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ possui dois zeros reais e iguais;

   c) a parábola relacionada a f intersecciona o eixo x em um único ponto, de abscissa $x_1 = x_2$ e ordenada 0.

3. $\Delta < 0$

   a) a equação $ax^2 + bx + c = 0$, não possui raízes reais;

   b) a função $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ não possui zeros reais;

   c) a parábola relacionada a f não intersecciona o eixo x.

Exercício resolvido: Determine, caso existam, os zeros da função $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

Resolução: Vamos igualar f à zero, assim $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$. Em seguida, calculamos os zeros da função, a partir da fórmula de Bhaskara.
Nesse sentido, sabemos que $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$. Substituindo os valores, temos que: $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (9) = 0$. Como $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes reais e igauis. Assim, $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot (1)} = 3$. Portanto, $x_1 = x_2 = 3$.

6.3.4 Vértice de uma parábola

Definição: O vértice V de uma parábola é representado pelo ponto de intersecção do eixo de simetria com a própria parábola. Temos então que as coordenadas do vértice são:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Mas como o encontramos? Vamos justificar a seguir:
Sendo a abscissa do vértice a média aritmética entre as raízes x_1 e x_2, então:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_v = \frac{\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}{2}$$

$$x_v = \frac{\left(\frac{-b-b}{2a}\right)}{2}$$

$$x_v = \frac{\left(-\frac{2b}{2a}\right)}{2} \quad = \quad -\frac{b}{2a}$$

Vamos agora, obter y_v. Para isso, fazemos a substuituição na função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, veja:

$$y_v = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$$y_v = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \quad = \quad -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad = \quad -\frac{\Delta}{4a}$$

Portanto, $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

6.3.5 Valor de máximo e mínimo

Conhecendo as coordenadas do vértice de uma parábola, podemos determinar a imagem da função quadrática relacionada a ela e também o valor de máximo ou de mínimo dessa função.

Máximo

Definição: Quando $a < 0$, a parábola que a representa tem concavidade voltada para baixo e, portanto:

- $V(x_v, y_v)$ é o ponto de máximo de f;
- $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ corresponde ao valor máximo de f;
- O conjunto imagem é dado por: $Im(f) = \left]-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$.

Mínimo

Definição: Quando $a > 0$, a parábola que a representa tem concavidade voltada para cima e, portanto:

- $V(x_v, y_v)$ é o ponto de mínimo de f;
- $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ corresponde ao valor mínimo de f;
- O conjunto imagem é dado por: $Im(f) = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, \infty\right[$.

Agora, para uma melhor compreensão, que tal pensar no exercício resolvido?

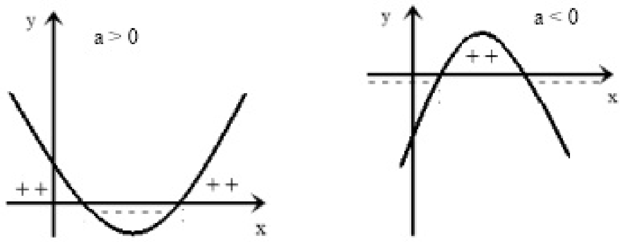
Exercício resolvido: Determine o conjunto imagem da função $f(x) = 4x^2 - 8x + 4$.

Resolução: Como $a > 0$, então já sabemos que $Im(f) = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, \infty\right[$, então vamos determinar o valor de mínimo da função.
$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$, sendo que $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (4) = 0$. Portanto, $Im(f) = [0, \infty[$.

6.3.6 Estudo do sinal da função quadrática

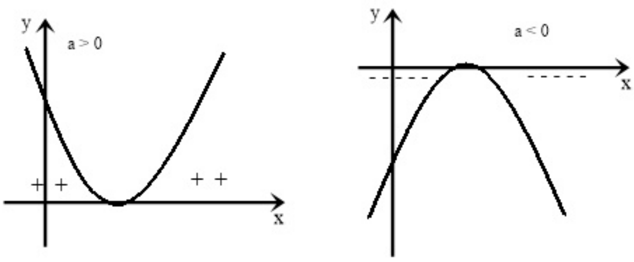
Já vimos que no estudo do sinal de uma função afim f determinamos os valores de x do domínio para os quais $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ e $f(x) < 0$. Para o estudo do sinal na função quadrática vamos considerar três casos:

1. $\Delta > 0$
   Nesse caso, a função possui dois zeros reais e distintos ($x_1 \neq x_2$) e a parábola intersecciona o eixo x em dois pontos. Assim, no estudo do sinal de f, temos:



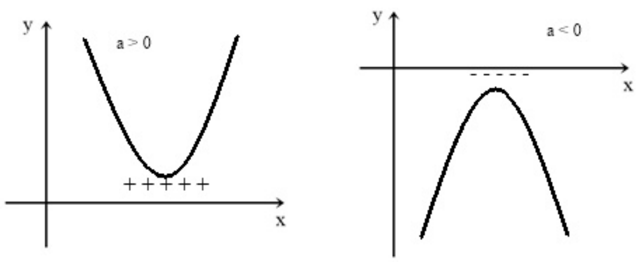
2. $\Delta = 0$

   Nesse caso, a função possui dois zeros reais e iguais ($x_1 = x_2$) e a parábola intersecciona o eixo x em um único ponto. Assim, no estudo do sinal de f, temos:



3. $\Delta < 0$

   Nesse caso, a função não possui zeros reais e a parábola não intersecciona o eixo x. Assim, no estudo do sinal de f, temos:



Com isso, finalizamos o estudo do sinal de uma função quadrática.

Exercícios:

1. Observando as seguintes funções quadráticas, diga se a parábola tem concavidade voltada para cima ou para baixo. Justifique.

   a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $f(x) = -x^2 - x + 6$

c) $g(x) = 3x^2$

d) $h(x) = 1 - 4x^2$

2. (ENEM - 2014) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:
I. A nota zero permanece zero;
II. A nota dez permanece dez;
III. A nota 5 passa a ser 6.
A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é:

3. Seja a função $f(x) = x^2 – 2x + 3k$. Sabendo que essa função possui duas raízes reais e iguais, determine o valor real de k.

4. Esboçar o gráfico da função $y = 2x^2 – 3x + 1$, determinando:

   a) as raízes

   b) as coordenadas do vértice

   c) a classificação de y_v

   d intersecção da curva com o eixo y

5. (UEPA-2006) Uma fábrica de beneficiamento de peixe possui um custo de produção de x quilos de peixe, representado por $C(x) = x^2 + 10x + 900$. O valor mínimo do custo, em reais, é:

   a) 700. b) 720. c) 750. d) 800. e) 875.

6. (UEPA-2005) Ao chutar uma lata, um cientista observou que sua trajetória seguiu a lei matemática $h(t) = 6 + 4t - t^2$, na qual h é a altura, em metros, atingida pela lata em função do tempo t, em segundos, após o chute. Com base nesta situação e analisando as afirmativas a seguir:
I. O gráfico que traduz a função acima descrita é uma parábola com concavidade voltada para cima.
II. A altura máxima atingida por essa lata é de $10m$.
III. Essa função possui duas raízes reais.
É correto afirmar que:

   a) todas as afirmativas são verdadeiras

   b) todas as afirmativas são falsas

   c) somente a afirmativa I é falsa

   d) somente a afirmativa II é verdadeira

e) somente a afirmativa III é verdadeira

7. Faça o estudo do sinais das funções:

   a) $g(x) = x^2 - 2x + 1$

   b) $h(n) = -2n^2 + 8n - 8$

6.4 Função Modular

6.4.1 Módulo de um número

Definição: Sendo $x \in \mathbb{R}$, definimos módulo ou valor absoluto de x, representado por $|x|$, por meio da relação:

$$|x| = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Isso significa que:

- se x é positivo ou zero, $|x|$ é igual ao próprio x.

- se x é negativo, $|x|$ é igual a $-x$.

Outra forma de dizer isso é pensar que o módulo de um número sempre terá, por fim, um valor positivo. Por exemplo, se o nosso valor de x for 5, esse resultado será igualmente 5, pois o número já é positivo. Caso o nosso x fosse igual a -5, bastaria adicionar um outro sinal negativo à equação, como a definição indica, e obteríamos o valor do módulo como 5, como no exemplo anterior.

Propriedades:

- $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

- $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

- $x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

- $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

- $|x - y| \geq |x| - |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

6.4.2 Função modular

Compreender o conceito de função modular é bem simples, principalmente quando estudamos separadamente o conceito de função e de módulo. Como vimos anteriormente, uma função é quando um conjunto inteiro de elementos (o domínio) está subordinado ao valor de um único elemento de outro conjunto (o contradomínio). Quando adicionamos um módulo a essa função, os princípios serão os mesmos, mas você levará em consideração a aplicação dos princípios modulares que acabamos de descrever. Ou seja, os elementos que estiverem entre as barras sempre serão positivos, ainda que corresponda a um valor expresso em números negativos. Assim, definimos a função modular:

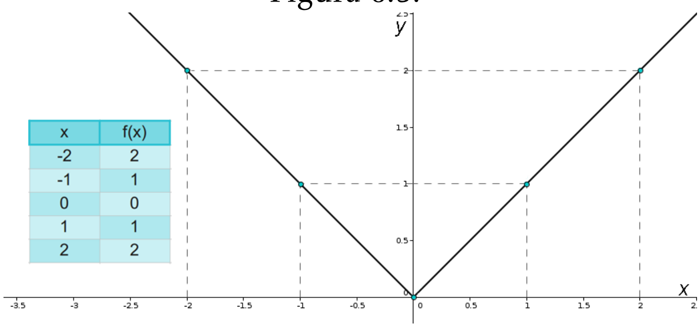
Definição: Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função módulo ou modular quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa-se o elemento $|x| \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = |x|$$

Gráfico da função modular

Todo gráfico é composto por uma série de pontos, os quais possuem coordenadas no eixo x, eixo das abscissas, e no eixo y, eixo das ordenadas. Portanto, para montar o gráfico de uma função modular, basta adotar alguns valores para x e aplicá-los à função *f(x)* = $|x|$, de forma a obter os seus respectivos valores em y. Feito isso, é só montar uma tabelinha com todos os pares ordenados encontrados, o que facilita bastante a representação gráfica no plano cartesiano. Podemos seguir esse procedimento para obter o gráfico da função *f(x)*= $|x|$, por exemplo. Observe a figura:

Figura 6.5:



x	f(x)
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

O gráfico da *f(x)*= $|x|$ é representado por duas semirretas de origem O, que são as bissetrizes do primeiro e segundo quadrantes. A imagem dessa função é *Im*= $\mathbb{R}_+$, isto é, a função modular somente assume valores reais não negativos.

Uma função modular nem sempre será dada na forma *f(x)* = $|x|$. É muito provável que alguns termos a acompanhem, somando ou subtraindo a incógnita x dentro e fora do módulo. Porém, a construção do gráfico pode ser feita da mesma forma. Vamos para um exemplo?

Exercício Resolvido: Obtenha a solução da função $f(x) = |2x+8|$ e esboce o seu gráfico.

Resolução: Inicialmente devemos aplicar a definição de função modular. Observe:

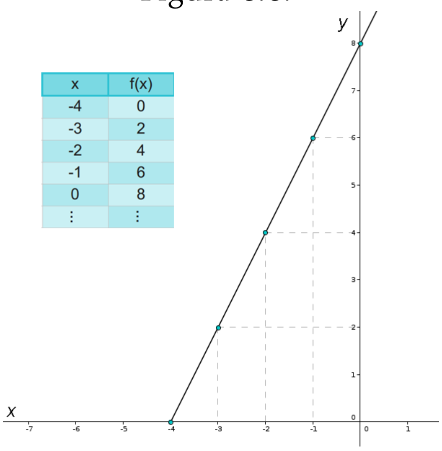
$$|2x+8| = \begin{cases} 2x+8, & se \quad 2x+8 \geq 0 \\ -(2x+8), & se \quad 2x+8 < 0 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira inequação, temos que:

$$2x+8 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -8 \Rightarrow x \geq \frac{-8}{2} \Rightarrow x \geq -4$$

Assim, conseguimos fazer a relação entre x e *f(x)*. Sabendo que $x \geq -4$ e $f(x) = y$, obtemos o gráfico da função.

Figura 6.6:



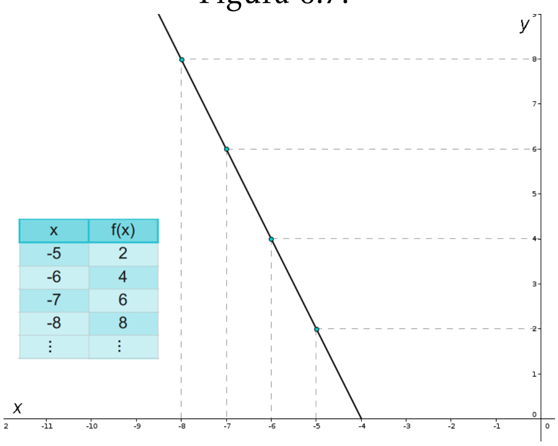
x	f(x)
-4	0
-3	2
-2	4
-1	6
0	8
⋮	⋮

Resolvendo a segunda inequação, temos que:

$$2x+8 < 0 \Rightarrow 2x < -8 \Rightarrow x < -\frac{8}{2} \Rightarrow x < -4$$

Assim, conseguimos fazer a relação entre x e *f(x)*. Sabendo que x deve ser menor que -4 e *f(x)* $= y$, obtemos o gráfico da função. Observe no gráfico que não há ponto nas coordenadas $(-4, 0)$. Isso acontece pois o intervalo que encontramos é aberto.

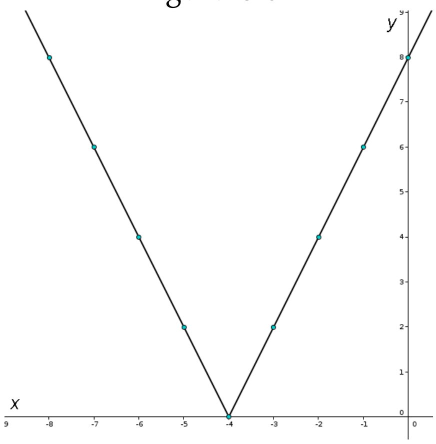
Figura 6.7:



x	f(x)
-5	2
-6	4
-7	6
-8	8
⋮	⋮

Agora, para obter o gráfico da função modular solicitada, você deve unir as parciais dos dois gráficos feitos anteriormente. Assim, obtemos o gráfico da função.

Figura 6.8:



Como pudemos ver, os conceitos de módulo e função modular são muito simples! Bom, agora que você tem uma ideia mais clara do que significam as funções modulares, que tal resolver alguns exercícios?

Exercícios:

1. As soluções da equação $|x-3| = 5$ são números inteiros:

   a) ímpares e de mesmo sinal.

   b) pares e de mesmo sinal.

   c) ímpares e de sinais opostos.

   d) pares e de sinais opostos.

2. (FUVEST) O conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano que satisfazem $t^2-t-6 = 0$, onde $t = |x-y|$, consiste de:

   a) uma reta.

   b) duas retas.

   c) quatro retas.

   d) uma parábola.

3. (FGV) O polígono do plano cartesiano determinado pela relação $|3x| + |4y| = 12$ tem área igual a:

   a) 6.

   b) 12.

   c) 16.

   d) 24.

   e) 25.

4. (UFC) Dadas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |1 - x^2|$ e $g(x) = |x|$. O número de pontos na intersecção do gráfico de f com o gráfico de g é igual a:

   a) 5.

   b) 4.

   c) 3.

   d) 2.

   e) 1.

5. O número de soluções negativas da equação $|5x - 6| = x^2$ é:

   a) 0.

   b) 1.

   c) 2.

   d) 3.

   e) 4.

6. Seja $f(x) = |3x - 4|$ uma função. Sendo $a \neq b$ e $f(a) = f(b) = 6$, então o valor de $a + b$ é igual a:

   a) $\frac{5}{3}$.

   b) $\frac{8}{3}$.

   c) 5.

   d) 3.

7. (UNITAU) Se x é uma solução de $|2x - 1| < 5 - x$, então:

   a) $5 < x < 7$.

   b) $2 < x < 7$.

   c) $-5 < x < 7$.

   d) $-4 < x < 7$.

   e) $-4 < x < 2$.

6.5 Função Inversa e Função Composta

6.5.1 Função inversa

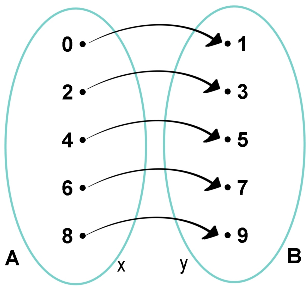
A função inversa ou invertível é um tipo de função bijetora, ou seja, ela é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo. Recebe esse nome pois, a partir de uma dada função, é possível inverter os elementos correspondentes de domínio e contradomínio.

Definição: Dada uma função bijetora $f : A \to B$ com domínio A e imagem B, ela apresenta a função inversa $f^{-1} : B \to A$, com domínio B e imagem A. Logo, a função inversa pode ser definida:

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

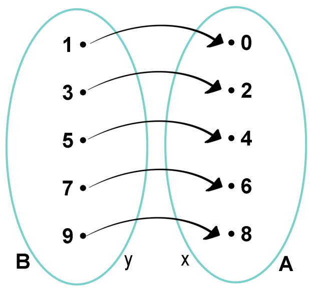
Exemplo: Conside os conjuntos $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e a função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x + 1$. A função f está representada no diagrama:

Figura 6.9:



A função f é bijetora. Cada elemento $x \in A$ está associado a um único elemento $y \in B$, de modo que $y = x + 1$. Porém, como f é bijetora, a cada elemento y de B está associado um único elemento x de A, de modo que $x = y - 1$; portanto temos uma outra função $g : B \to A$, de modo que $x = y^{-1}$ ou $g(y) = y^{-1}$.O domínio de f é o conjunto imagem de g, enquanto o conjunto imagem de f é o domínio de g. Essa função está representada no diagrama:

Figura 6.10:



Pelo que acabamos de ver, a função f leva x até y, enquanto a função g leva y até x. A função $g : B \to A$ recebe o nome de função inversa de f e é indicada por f^{-1}.

Obtendo a inversa de funções reais

Se tratamos de uma função definida nos reais, tal que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função bijetora onde $y = f(x)$, então, para obtermos a sua inversa, podemos reescrever a função da forma $x = g(y)$ tal que x dependa de y. Com isso temos que esta nova função: $g(y) = f^{-1}$.

Gráfico de funções inversas

O gráfico de uma função inversa f^{-1} possui uma simetria em relação a função f. No exemplo abaixo, veremos que há uma simetria com a reta $y = x$ entre uma função f e f^{-1} e que os pontos correspondentes ao eixo de simetria $y = x$ de ambas as funções são equidistantes.

Exemplo: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$. Para obtermos a sua inversa devemos encontrar uma função que satisfaça a condição $x = g(y)$.

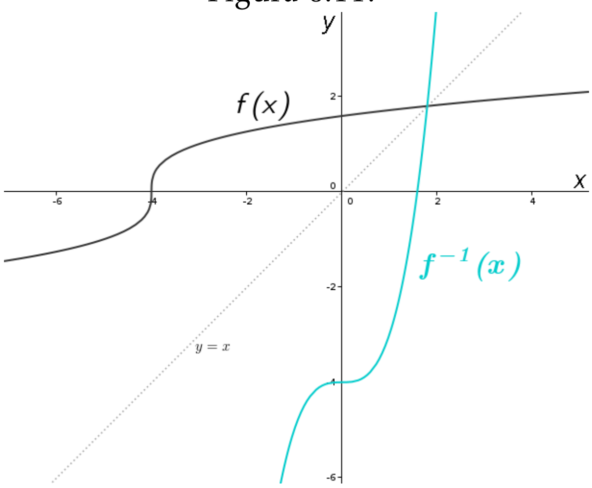
$$y = \sqrt[3]{x+4} \Rightarrow y^3 = x + 4$$

Algebricamente podemos trocar a variável x pela variável y na função original, da seguinte maneira:

$$x^3 = y + 4 \Rightarrow y = x^3 - 4 = f^{-1}(x)$$

Ao construirmos o gráfico, observamos a simetria de f e f^{-1}. Observe:

Figura 6.11:



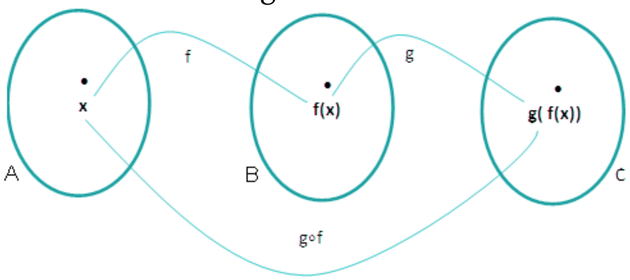
6.5.2 Função composta

A função composta, também chamada de função de função, é um tipo de função matemática que combina duas ou mais variáveis.

Definição: Dadas as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, a função composta de g e f é a função $g \circ f : A \to C$ que definimos por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A \quad \text{(Figura 6.12)}$$

Figura 6.12:



Fonte: http://bit.ly/2wmosWn.

Note que nas funções compostas as operações entre as funções não são comutativas. Ou seja, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exercício resolvido: Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Calcule $g(-3\sqrt{2})$ sabendo que $f(x) = x - 2$ e $f(g(x)) = x^2 - 1$.

Resolução: Primeiramente devemos esboçar a composição da $f \circ g$:

$$f(g(x)) = g(x) - 2$$

Como $f(g(x)) = x^2 - 1$, temos que:

$$x^2 - 1 = g(x) - 2 \Rightarrow g(x) = x^2 + 1$$

Calculando $g(-3\sqrt{2})$:

$$g(-3\sqrt{2}) = (-3\sqrt{2})^2 + 1 = 9 \cdot 2 + 1 = 19.$$

Exercícios:

1. Dada a função $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ com $x \neq -2$, calcule $f^{-1}(-1)$.

2. Se a função real f é definida por $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ para todo $x > 0$, então $f^{-1}(x)$ é igual a:

   a) $1 - x$.

   b) $x + 1$.

   c) $x^{-1} - 1$.

   d) $x^{-1} + 1$.

   e) $\dfrac{1}{x+1}$.

3. Dada a função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuja lei é $f(x) = (x-1)^2 - (x+2)^2 + 3$. Seja a sua função inversa denotada por f^{-1}. O conjunto solução da equação $f(x) = f^{-1}(x)$ é:

   a) $\{8\}$.

b) $\{-8\}$.

c) $\{0\}$.

d) $\mathbb{R}$.

e) $\varnothing$.

4. (UFPA) O gráfico de uma função $f(x) = ax+b$ é uma reta que corta os eixos coordenados nos pontos (2, 0) e (0, -3). O valor de $f(f^{-1}(0))$ é:

   a) $\frac{15}{2}$.

   b) 0.

   c) $\frac{10}{3}$.

   d) $\frac{10}{3}$.

   e) $\frac{-5}{2}$.

5. (SEDUC RJ) Considere a função de variável real $f(x) = \frac{(3x+8)}{2}$. Qual o valor de $f^{-1}(10)$?

   a) $0,05$.

   b) 6.

   c) 0,25.

   d) 4.

   e) 19.

6. (RFB) A função bijetora dada por $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ possui domínio no conjunto dos números reais, exceto o número 2, ou seja: $\mathbb{R}-\{2\}$. O conjunto imagem de *f(x)* é o conjunto dos reais menos o número 1, ou seja: $\mathbb{R}-\{1\}$. Desse modo, diz-se que *f(x)* é uma função de $\mathbb{R}-\{2\}$ em $\mathbb{R}-\{1\}$. Com isso, a função inversa de *f*, denotada por f^{-1}, é definida como:

   a) $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ de $\mathbb{R}-\{1\}$ em $\mathbb{R}-\{2\}$.

   b) $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ de $\mathbb{R}-\{1\}$ em $\mathbb{R}-\{2\}$.

   c) $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ de $\mathbb{R}-\{2\}$ em $\mathbb{R}-\{1\}$.

   d) $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{x+1}$ de $\mathbb{R}-\{1\}$ em $\mathbb{R}-\{2\}$.

   e) $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{x+1}$ de $\mathbb{R}-\{2\}$ em $\mathbb{R}-\{2\}$.

7. Dada a função $f :]-\infty, 3] \to [-1, +\infty[$ com $f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 8$. Obtenha a lei da sua função inversa.

   a) $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x}$.

b) $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x}$.

c) $f^{-1}(x) = -3 + \sqrt{1-x}$.

d) $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{1+x}$.

e) $f^{-1}(x) = -x^2 + 6x - 8$.

8. Se $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = -2x - 1$, determine a lei que define $f[g(x)]$ e $g[f(x)]$.

9. Dadas as funções f e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, determine a função $g \circ f$ e $f \circ g$ em cada caso:

a) $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = 2 - 2x$

b) $f(x) = 2x$ e $g(x) = 4x + 1$

c) $f(x) = 6 - 1$ e $g(x) = 6x + 3$

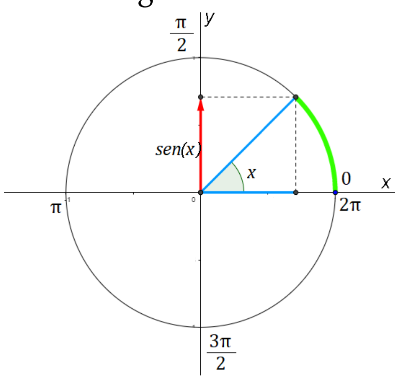
6.6 Funções trigonométricas

6.6.1 Função seno

A função seno é definida como uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = sen(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Figura 6.13:

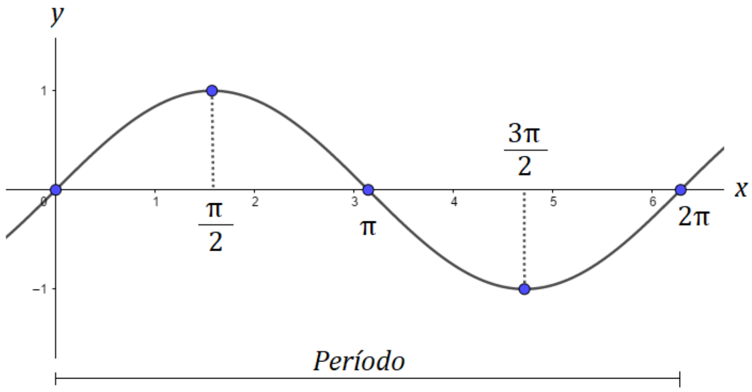


Fonte: http://bit.ly/39ojarK

A imagem da função seno é o intervalo [-1, 1], pois os valores que o seno pode assumir para qualquer valor de x variam entre -1 e 1. O período da função seno é 2π, pois se $sen(x) = y$ (para qualquer valor de x teremos um valor em y) então $sen(x + 2k\pi) = y, \forall k \in \mathbb{Z}$, ou seja:

$$y = sen(x) = sen(x + 2k\pi)$$

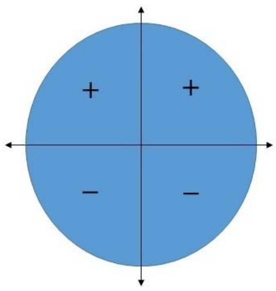
Figura 6.14:



Fonte: http://bit.ly/39ojarK

No círculo trigonométrico, o sinal da função seno é positivo quando x pertence ao primeiro e segundo quadrantes. Já no terceiro e quarto quadrantes, o sinal é negativo.

Figura 6.15:



Fonte: http://bit.ly/39mcUki

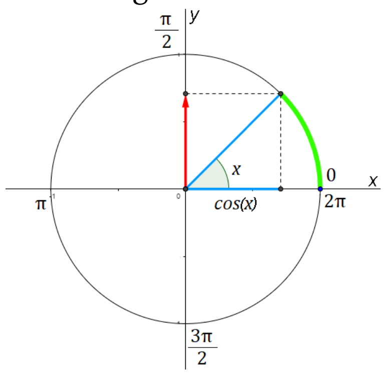
Além disso, no primeiro e quarto quadrantes a função f é crescente. Já no segundo e terceiro quadrantes a função f é decrescente. O domínio e o contradomínio da função seno são iguais a $\mathbb{R}$. Ou seja, ela está definida para todos os valores reais. Em relação à simetria, a função seno é uma função ímpar: $sen(-x) = -sen(x)$.

6.6.2 Função cosseno

A função cosseno é definida como uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Figura 6.16:

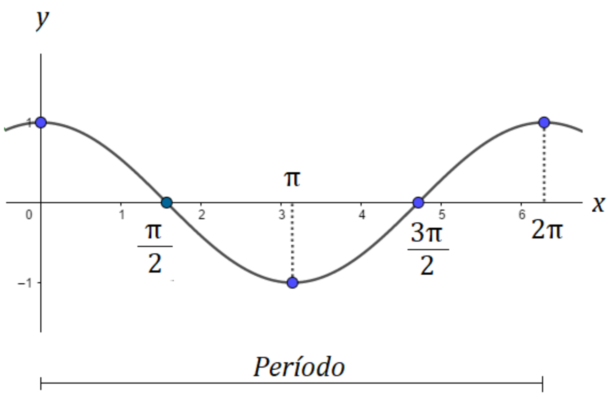


Fonte: http://bit.ly/39ojarK

A imagem da função cosseno é o intervalo [-1, 1], pois os valores que o cosseno pode assumir para qualquer valor de x podem variar apenas de -1 a 1. O período da função cosseno é 2π pois se $cos(x) = y$ (para qualquer valor de x teremos um valor em y) então $cos(x + 2k\pi) = y, \forall k \in \mathbb{Z}$, ou seja:

$$y = cos(x) = cos(x + 2k\pi)$$

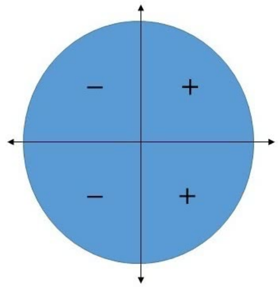
Figura 6.17:



Fonte: http://bit.ly/39ojarK

No círculo trigonométrico, o sinal da função cosseno é positivo quando x pertence ao primeiro e quarto quadrantes. Já no segundo e terceiro quadrantes, o sinal é negativo.

Figura 6.18:



Fonte: http://bit.ly/39mcUki

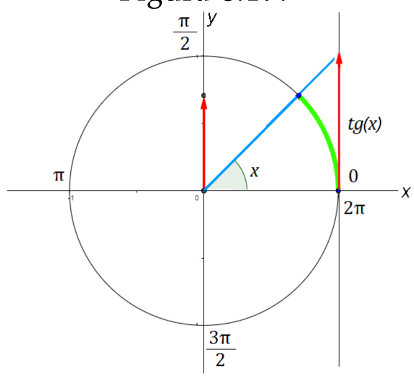
Além disso, no primeiro e segundo quadrantes a função f é decrescente. Já no terceiro e quarto quadrantes a função f é crescente. O domínio e o contradomínio da função cosseno são iguais a $\mathbb{R}$. Ou seja, ela está definida para todos os valores reais. Em relação à simetria, a função cosseno é uma função par: $cos(-x) = cos(x)$.

6.6.3 Função tangente

A função tangente é definida como uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = tg(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Figura 6.19:

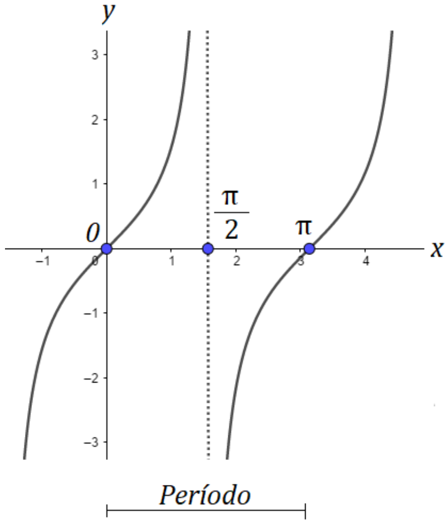


Fonte: http://bit.ly/39ojarK

O domínio da função tangente é diferente das funções seno e cosseno. Logo, o domínio da função será dado por $D(f) = x \in \mathbb{R} : x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ onde percebemos que não existem valores para a tangente quando a sua representação no ciclo estiver no eixo dos senos. A imagem da função tangente é o próprio conjunto dos $\mathbb{R}$, ou seja, para qualquer valor de x existe y real. O período da função tangente é π. Então dizemos: $tg(x) = tg(x + k\pi) = y, \forall k \in \mathbb{Z}$. Observe:

Note que no ponto $x = \dfrac{\pi}{2}$ o gráfico não tem nenhuma representação em y. Dessa forma, existem retas assíntotas nos pontos onde $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

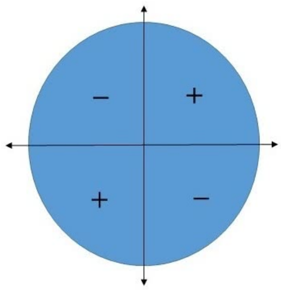
Figura 6.20:



Fonte: http://bit.ly/39ojarK

No círculo trigonométrico, o sinal da função tangente é positivo quando x pertence ao primeiro e terceiro quadrantes. Já no segundo e quarto quadrantes, o sinal é negativo.

Figura 6.21:



Fonte: http://bit.ly/39mcUki

Além disso, a função f definida por $f(x) = tg(x)$ é sempre crescente em todos os quadrantes do círculo trigonométrico. O domínio da função tangente é: $D(tg) = x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. Em relação à simetria, a função tangente é uma função ímpar: $tg(-x) = -tg(-x)$.

Exercícios:

1. (ENEM - 2017) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + Bcos(kt)$ em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi:

a) $P(t) = 99 + 21 \cdot cos(3\pi t)$.

b) $P(t) = 78 + 42 \cdot cos(3\pi t)$.

c) $P(t) = 99 + 21 \cdot cos(2\pi t)$.

d) $P(t) = 99 + 21 \cdot cos(t)$.

e) $P(t) = 78 + 42 \cdot cos(t)$.

2. (CEFET - PR) A função real $f(x) = a + b \cdot sen(cx)$ tem imagem igual a [-7, 9] e seu período é $\frac{\pi}{2}$ rad. Assim, $a + b + c$ vale:

a) 13.

b) 9.

c) 8.

d) -4.

e) 10.

3. (UFPI) O período da função $f(x) = 5 + sen(3x - 2)$ é:

a) 3π.

b) $\frac{2\pi}{3}$.

c) $3\pi - 2$.

d) $\frac{\pi}{3} - 2$.

e) $\frac{\pi}{5}$.

4. (UFAM) O menor valor não negativo côngruo[1] ao arco de $\frac{21\pi}{5}$rad é igual a:

   a) $\frac{\pi}{5}$ rad.

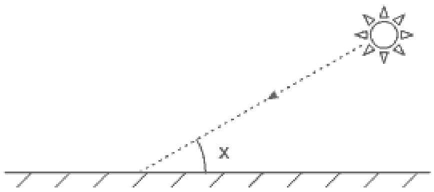
   a) $\frac{7\pi}{5}$ rad.

   c) π rad.

   d) $\frac{9\pi}{5}$ rad.

   e) 2π rad.

5. (ENEM - 2017) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura.



   Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $l(x) = k.sen(x)$ sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0º e 90º. Quando $x = 30$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

   a) 33%.

   b) 50%.

   c) 57%.

   d) 70%.

   e) 86%.

6. O período da função $y = cos(\pi\sqrt{2x})$, é:

   a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   c) $\frac{\pi}{2}$.

   d) $\sqrt{2}$.

   e) 2.

7. O domínio da função $f(x) = tg(2x)$, é:

   a) $\{\in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

[1]Dois arcos são côngruos quando possuem a mesma origem e a mesma extremidade.

b) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

8. (MACKENZIE - 2012) O maior número real que $\dfrac{10}{2 - \dfrac{senx}{3}}$ pode assumir é:

a) $\frac{20}{3}$.

b) $\frac{7}{3}$.

c) 10.

d) 6.

e) $\frac{20}{7}$.

9. Sobre a função $f(x) = tg(x)$, assinale a alternativa correta.

a) O gráfico não corta o eixo x.

b) Não existe valores de tangente para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}$.

c) O gráfico é paralelo ao eixo y.

d) $tg(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$.

e) O gráfico de *f(x)* passa pelo ponto (0, 1).

6.7 Função exponencial

Definição: Seja a um número real positivo diferente de 1. A função exponencial de base a é definida por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a^x$.

Note que $f(x)$ é sempre prositivo. A função exponencial é crescente quando $a > 1$ (Figura 6.22), e decrescente quando $0 < a < 1$ (Figura 6.23).

Figura 6.22:

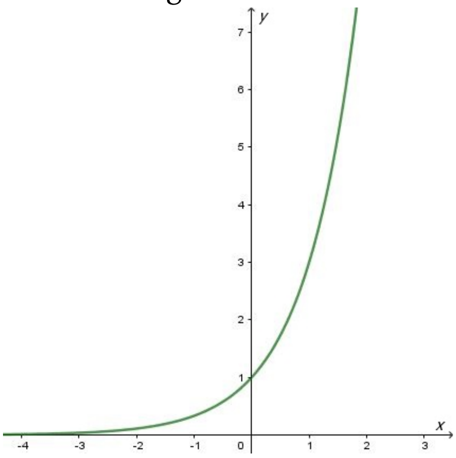
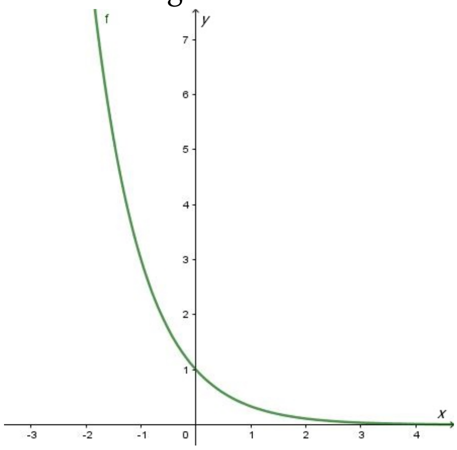


Figura 6.23:



Exercícios:

1. Assinale (C) para funções crescentes e (D) para funções decrescentes:

a) (   ) $f(x) = \pi^x$

b) (   ) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x}$

c) (   ) $f(x) = 2^{-x}$

d) (   ) $f(x) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2x}$

6.7.1 Equações

As equações exponenciais são aquelas cuja incógnita aparece no expoente, por exemplo, $3^{x-1} = \frac{1}{9}$. Para resolver uma equação exponencial, devemos escrever os dois lados como potências de mesma base.

Exercício resolvido : Resolva a equação $3^{x-1} = \frac{1}{9}$.

Resolução: Vamos escrever os dois lados da equação como potências de mesma base.

$$3^{x-1} = \frac{1}{3^2} \Rightarrow 3^{x-1} = 3^{-2}$$

Agora, igualamos os expoentes:

$$x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$$

Exercícios:

1. Resolva as equações:

a) $9^{2x-3} = \dfrac{1}{27}$

b) $5^x + 5^{x+1} = 6$

c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} - 2^{x+3} + 2^{x+4} = 60$

d) $10 \cdot 2^{-x^2+5x} = 640$

e) $2^x + 4^x = 72$

f) $9^x + 6 \cdot 3^x = 27$

2. (UFJF) Dada a equação $2^{3x-2} \cdot 8^{x+1} = 4^{x-1}$, podemos afirmar que sua solução é um número:

   a) natural.

   b) maior que 1.

   c) de módulo maior que 1.

   d) par.

   e) de módulo menor do que 1.

3. (Mackenzie) A soma da raízes da equação $2^{2x+1} - 2^{x+4} = 2^{x+2} - 32$ é:

   a)2. b)3. c)4. d)6. e)7.

6.7.2 Inequações

As funções exponenciais ou são crescentes ou são decrescente em todo o seu domínio. Assim temos:

Caso 1 $(a > 1) : a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow x_1 > x_2$
Caso 2 $(0 < a < 1) : a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2$
Exercício resolvido: Resolva a equação $2^{x-5} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$.
Resolução: $(2^2)^{x-5} > (2^{-1})^{x-1} \Rightarrow (2)^{2x-10} > 2^{-x+1}$

Como a base é maior que 1,

$$2x - 10 > -x + 1 \Rightarrow 3x > 11 \Rightarrow x > \frac{11}{3}$$

Exercícios:

1. Resolva a inequação $27^{x+1} > 9^{x-2}$.

2. (UFRGS) A solução da inequação $0,5^{1-x} > 1$ é o conjunto:

   a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

   b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

e) $\mathbb{R}$.

3. Resolva as seguintes inequações:

a) $1 < 2^{x+1} \leqslant 8$

b) $(2^x)^{x-1} > 64$

c) $0,2^{3x} \leqslant 0,2^{x^2}$

d) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \leqslant 0$

4. (Adaptado - VUNESP) É dada a inequação

$$\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} \geqslant \left(\frac{3}{9}\right)^{x-3}$$

O conjunto solução V, considerado o conjunto universo como sendo o dos reais, é dado por:

a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \ \ ou \ \ x \geqslant 2\}$.

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \ \ e \ \ x \geqslant 2\}$.

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 2\}$.

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3\}$.

e) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$.

6.7.3 Função de tipo exponencial

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial quando $f(x) = b \cdot a^x$ para a e b números reais positivos ($a \neq 1$). A a função de tipo exponencial também é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

Por exemplo, $f(x) = 7 \cdot 2^{2x+4}$ é de tipo exponencial, pois

$$f(x) = 7 \cdot 2^{2x+4} = 7 \cdot 2^{2x} \cdot 2^4 = 7 \cdot 16 \cdot (2^2)^x = 112 \cdot 4^x$$

Observamos que funções do tipo $f(x) = b \cdot a^{cx+d}$ são também funções do tipo exponencial.

Exercícios:

1. (FUVEST-SP) Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se a e b são tais que $f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que:

a) $a + b = 2$.

b) $a + b = 1$.

c) $a - b = 3$.

d) $a - b = 2$.

e) $a - b = 1$.

2. (FUVEST-SP) Sendo $f(x) = \left(\frac{4^x+4^{-x}}{2}\right)$ e $g(x) = \left(\frac{4^x-4^{-x}}{2}\right)$, calcule o valor de $[f(x)]^2 - [g(x)]^2$.

3. (PUC-MG) Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas. Assim, o número n de bactérias após t horas é dado pela função $n(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$. Nessas condições, pode-se afirmar que a população será de 51200 bactérias depois de:

   a) 1 dia e 3 horas.

   b) 1 dia e 9 horas.

   c) 1 dia e 14 horas.

   d) 1 dia e 19 horas.

4. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a \cdot 3^{bx}$, onde a e b são constantes reais. Dado que $f(0) = 900$ e $f(10) = 300$, determine k de modo que $f(k) = 100$.

   a) $k = -1$.

   b) $k = 20$.

   c) $k = 12$.

   d) $k = 5$.

   e) $k = 1$.

5. (UEMG) Na lei $P(t) = 2400 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t-2}$ está representada a população $P(t)$ que uma pequena cidade terá daqui a t anos, contados a partir de hoje. Sabendo que daqui a x anos, o número de habitantes de uma pequena cidade será de 3600 habitantes, o valor numérico de x corresponde a:

   a) um divisor de 100.

   b) um par maior que 4.

   c) um múltiplo de 5.

   d) um divisor de 150.

6. (UEMG) Segundo dados de uma pesquisa, a quantidade de árvores de certa região vem decrescendo em relação ao tempo t, contado em anos, segundo a relação:

$$Q(t) = 10000 \cdot 2^{-0,5t}$$

   Sendo 10000 a quantidade inicial e Q(t) a quantidade t anos após, para que essa quantidade inicial fique reduzida à quarta parte, deverão transcorrer:

a) 2 anos.

b) 3 anos.

c) 4 anos.

d) 5 anos.

e) 6 anos.

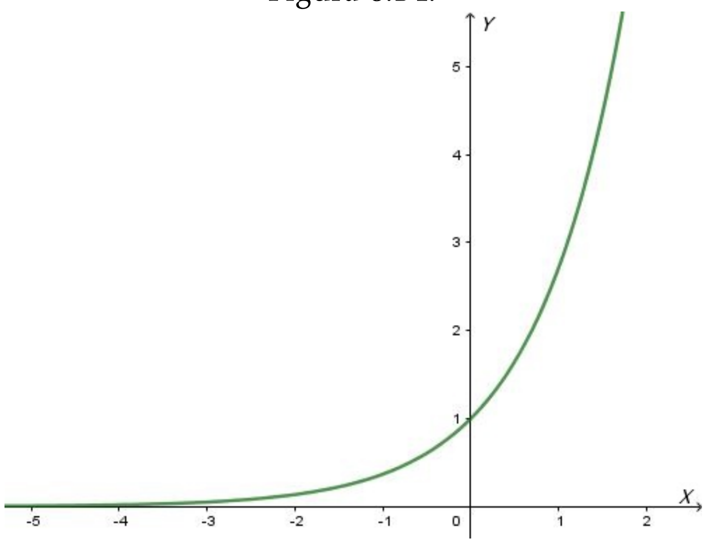
6.7.4 Função exponêncial natural

O número e

O valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)$, quando n é muito grande, é um resultado importante da matemática. Quando n tende para o infinito, o valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tende para o número $2,718281828...$. Esse número é representado pela letra e.

A função exponencial natural é a função $y = e^x$, representada pela Figura 6.24:

Figura 6.24:



6.8 Função logaritmo

A função logaritmo é a inversa da função exponencial. Para qualquer real positivo a diferente de 1, se tivermos $a^y = x$, diremos que o expoente y é o logaritmo de x na base a. Escrevemos $y = log_a x$.
Portanto:

$$a^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y = log_a\, x$$

Na sentença $a^y = x$, y é chamado de logaritmando ou antilogaritmo, a é a base do logaritmo e x é chamado de logaritmo.

Quando $a > 1$, para $x > 1$ tem-se $log_a\, x > 0$ e para $0 < x < 1$ temos $log_a\, x < 0$.
Observe (Figura 6.25), o gráfico da função $y = log_2\, x$ é crescente e (Figura 6.26), o gráfico da função $y = log_{\frac{1}{2}}\, x$ é descrescente.

Figura 6.25:

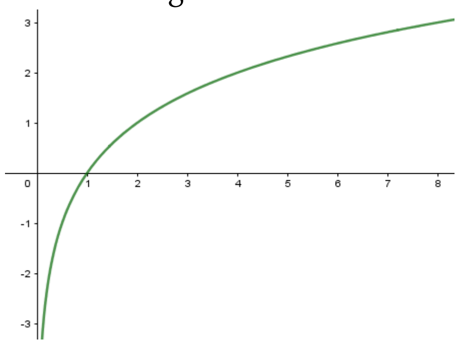
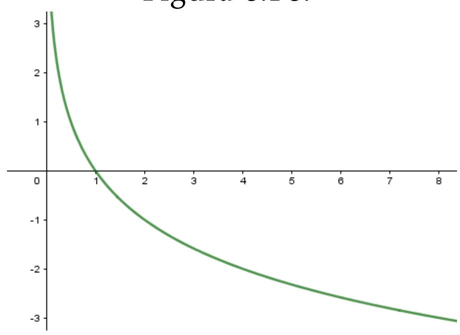


Figura 6.26:



O domínio da função logaritmo é $\mathbb{R}_+^* =]0, \infty[$ e a imagem é o conjunto $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.

Exercício resolvido: Determine o domínio da função $f(x) = log_3\, (x^2 - 4)$.

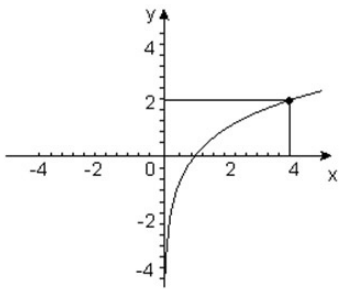
Resolução: Para que o logaritmo seja real devemos ter logaritmando positivo, base positiva e diferente de 1. Assim, $log_3\, (x^2 - 4) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ou $x > 2$.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant -2 \text{ ou } x > 2\}.$$

Exercícios:

1. Determine o domínio da função $f(x) = log_{(x+1)}\, (2x^2 - 5x + 2)$.

2. (PUCRS 2008) A representação da função dada por $y = f(x) = log_n\, (n^3 + 8)$ é:



a)2. b)4. c)6. d)8. e)10.

3. Considere a função $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = log_2\, x$. Calcule $f(8)$.

4. (UFRGS) Se $log_5\, x = 2$ e $log_{10}\, y = 4$, então $log_{20}\, \frac{y}{x}$ é:

   a)2. b)4. c)6. d)8. e)10.

5. Assinale V, para verdadeiro, ou F, para falso, em cada proposição:

   a) ( ) $log_{\frac{1}{2}}\, 6 > log_{\frac{1}{2}}\, 3$

   b) ( ) $log_2\, 3 > log_2\, 0,2$

   c) ( ) $log\, \frac{1}{2} > log\, \frac{1}{3}$

6. (UNISANTOS) Um aluno quer resolver a equação $3^x = 7$ utilizando uma calculadora que possui a tecla $logx$. Para obter um valor aproximado de x, o aluno deverá calcular:

   a) $\dfrac{log\, 7}{log\, 3}$.

   b) $\dfrac{log\, 3}{log\, 7}$.

   c) $log\, 7 \cdot log\, 3$.

   d) $log\, 7 + log\, 3$.

6.8.1 Propriedade dos logaritmos

Sejam x e y reais positivos. Em qualquer base a, valem as propriedades:

1. $log_a\, 1 = 0$
2. $log_a\, a = 1$
3. $log_a\, \dfrac{1}{a} = -1$
4. $log_a\, xy = log_a\, x + log_a\, y$
5. $log_a\, \dfrac{x}{y} = log_a\, x - log_a\, y$
6. $log_a\, x^r = r \cdot log_a\, x$ (r é um real não nulo)

Exercício resolvido: Encontre $log_{0,25}\, 32$.

Resolução: Chamamos $log_{0,25}\, 32 = x$. Então, por definição, $(0,25)^x = 32$.
Como $0,25 = \dfrac{1}{4} = 2^{-2}$, temos $(2^{-2})^x = 2^5$. Resolvendo a equação exponencial obtemos $-2x = 5 \Rightarrow x = -\dfrac{5}{2}$. Assim, $log_{0,25}\, 32 = -\dfrac{5}{2}$.

Importante!

· A base deve ser positiva e diferente de 1.
· Os números negativos e o zero não têm logaritmo.
· Quando escrevemos o logaritmo sem a base, fica subtendido que a base é 10.

Exercícios:

1. Resolva os itens:

   a) Se $log_2\ m = k$, determine o valor de $log_8\ m$.

   b) Determine o valor de $log_2\ 8$.

   c) Considerando $log\ 5 = 0,70$, determine o valor do $log\ 0,5$.

2. Acerca das propriedades de logaritmos, marque V, para verdadeiro, ou F, para falso.

   a) ( ) Sendo a, b e c números reais positivos, $a \neq 1$, então: $log_a\ (b \cdot c) = log_a\ b - log_a\ c$

   b) ( ) Sendo a e b números reais positivos, $a \neq 1$, e m um número real então: $log_a\ b^m = mlog_a\ b$

   c) ( ) Sendo a, b e c números reais positivos, $a \neq 1$, então: $log_a\ (\frac{b}{c}) = log_a\ b + log_a\ c$

3. (UFRGS) Atribuindo para $log\ 2$ o valor $0,3$, então os valores de $log\ 0,2$ e $log\ 20$ são, respectivamente:

   a) $-0,7$ e 3.

   b) $-0,7$ e $1,3$.

   c) $0,3$ e $1,3$.

   d) $0,7$ e $2,3$.

   e) $0,7$ e 3.

4. Desenvolva, aplicando as propriedades dos logaritmos (a, b e c são reais positivos):

   a) $log_2 \left(\frac{2ab}{c}\right)$ b) $log_3 \left(\frac{a^3b^2}{c^4}\right)$ c) $log \left(\frac{a^3}{b^2\sqrt{c}}\right)$

5. (UCS) Se $log\ 2 = a$ e $log\ 3 = b$, então $log\ 12$ vale:

   a) $a + b$.

   b) $2a + b$.

   c) $a + 2b$.

   d) $a + b$.

   e) $\frac{a}{b}$.

6.8.2 Mudança de base

Frequentemente possuímos o logaritmo de um número em certa base e precisamos conhecer o logaritmo desse mesmo número em outra base.

Suponha que conhecemos o valor de $log_a\, x$ e desejamos obter o valor de $log_b\, x$. Para isso, precisamos conhecer o valor de $log_a\, b$ e proceder da seguinte forma:

Sejam $log_a\, x = m$ e $log_a\, b = n$, ou seja, $log_a\, b = \frac{1}{n}$, pela propriedade anterior.

Pelas definições de logaritmos temos $b^{\frac{1}{n}} = a$ e $a^m = x$.

Substituindo: $x = (b^{\frac{1}{n}})^m = b^{\frac{m}{n}}$. Logo, $log_b\, x = \frac{m}{n}$, ou seja,

$$log_b\, x = \frac{log_a\, x}{log_a\, b}$$

Exercício resolvido: Se $log_2\, x = 3,8$, qual é o valor de $log_{64}\, x$?

Resolução: Aplicando a fórmula de mudança de base, temos:

$$log_{64}\, x = \frac{log_2\, x}{log_2 64} = \frac{3,8}{6} = 0,63$$

Exercícios:

1. Sabendo que $log_{30}\, 3 = a$ e $log_{30}\, 5 = b$, calcule $log_{10}\, 2$.
2. (VUNESP) Se $log_3\, a = x$, então $log_9\, a^2$ é igual a:

   a) $2x^2$.

   b) x^2.

   c) $x + 2$.

   d) $2x$.

   e) x.
3. Considerando que $log(a)$ seja igual a X e $log(b)$ igual a Y, então o $log_b\, a$ é:

   a) $X + Y$.

   b) $X - Y$.

   c) $X \cdot Y$.

   d) $\frac{Y}{X}$.

   e) $\frac{X}{Y}$.

4. Transforme em logaritmos de base 5:

   a) $log_3 2$

   b) $log 9$

5. Transforme em logaritmos de base 10:

   a) $log_2 2$

   b) $log_7 4$

   c) $log_{0,1} 8$

6. (ACAFE-SC) Sendo $log_a 2 = x$ e $log_a 3 = y$, o valor de $(log_2 a + log_3 a) \cdot log_a 4 \cdot log_a$ é:

   a) $2x + 2y$.

   b) $-2x - 2y$.

   c) $-x - y$.

   d) $x + y$.

   e) $x - y$.

7. (UNIMEP - SP) Sabe-se que $log 2 = 0,30$. Desse modo, pode-se dizer que $log_5 8$ é:

   a) $\frac{9}{7}$. b) $0,90$. c) $0,45$. d) $1,2$. e) $0,6$.

8. Calcule o valor de $log_3 5 \cdot log_{25} 27$.

6.8.3 Logaritmo neperiano

A base de um sistema de logaritmos é um número maior que zero e diferente de 1. O sistema de base 10, conhecido como os logaritmos decimais, é muito utilizado e encontra-se nas calculadoras. Outro sistema de logaritmos muito utilizado é o de base e, conhecido como logaritmo natural ou neperiano, por causa do matemático inglês John Neper (1550-1610), o primeiro a estudar os logaritmos e ter ideia dessa constante que, um século depois, passou a ser representada pela letra e. Dessa forma, o logaritmo neperiano de um número x é o logaritmo desse na base e. Portanto,

$$ln\ x = \log_e x.$$

O logaritmo neperiano é um logaritmo como qualquer outro. Assim, todas as propriedades vistas anteriormente valem para ele:

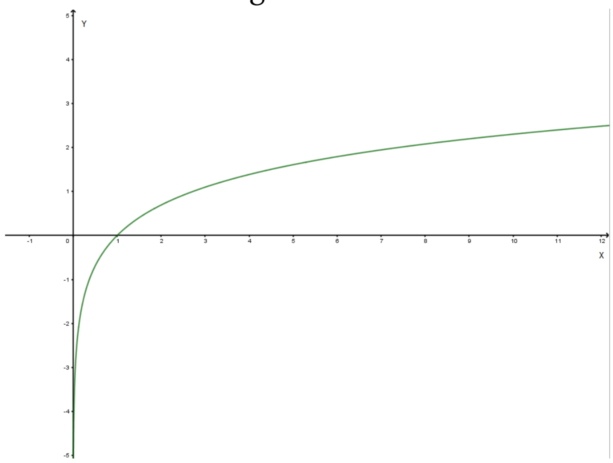
$$ln\ AB = ln\ A + ln\ B$$

$$ln\ \frac{A}{B} = ln\ A - ln\ B$$

$$ln\ A^n = n \cdot ln\ A$$

O gráfico da função $f(x) = ln\ x$ tem a mesma forma dos demais logaritmos de base maior que 1. Observe (Figura 6.27):

Figura 6.27:



Exercícios:

1. (EsPCEx) Fazendo $ln\ 5 = x$, temos que

$$y = e^x - e^{-x} = \frac{a}{b}\ a \in \mathbb{Z}\ e\ b \in \mathbb{Z}^*$$

a e b primos entre si. Logo, $a+b$:

a) 28. b) 29. c) 40. d) 51. e) 52.

2. (USP) Duas constantes reais A e B são tais que

$$ln\ \frac{(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} = A \cdot ln(x-1) + B \cdot ln(x+1)$$

para todo $x > 1$. O valor de A é:

a) -2. b) $-\frac{2}{3}$. c) $\frac{2}{3}$. d) $\frac{4}{3}$ e) 2.

6.8.4 Equações logarítmicas

Equações logarítmicas são aquelas que apresentam uma incógnita ligada a um logaritmo. Para resolver essas equações, além de usar a definição de logaritmo e suas propriedades, vamos considerar o fato de que a função é injetora, ou seja, se $\log_x A = \log_x B$, então $A = B$.

Exercício resolvido: Resolva a equação $\log_4(2x+6) = 2$.

Resolução: Ao aplicar a definição, temos $4^2 = 2x+6$. Logo, $2x = 10$ e $x = 5$.

Exercício resolvido: Resolva a equação $\log_2(x^2-2x)^3 = 9$.

Resolução: O primeiro passo para resolver essa equação é aplicar a propriedade do logaritmo de uma potência e, em seguida, a definição:

$$3 \cdot \log_2(x^2-2x) = 9 \Rightarrow \log_2(x^2-2x) = 3$$

$$2^3 = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

As raízes dessa equação são $x = -2$ e $x = 4$, mas não significa que esses valores sejam raízes da equação original. Dessa forma, para verificar se são raizes devemos substituir esses valores na equação dada.

Observamos:

$\log_2[(-2)^2 - 2(-2)] = \log_2 8 = 3$

$\log_2[(4)^2 - 2(4)] = \log_2 8 = 3$

Como os dois valores encontrados satisfazem, o conjunto solução é $\{-4, 8\}$.

Exercícios:

1. (UFRGS) Se $log_3 x + log_9 x = 1$, então o valor de x é:

   a) $\sqrt[3]{2}$. b) $\sqrt{2}$. c) $\sqrt[3]{3}$. d) $\sqrt{3}$. e) $\sqrt[3]{9}$.

2. (PUC - RS) A solução real para a equação $a^{(x+1)} = ba$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, é dada por:

   a) $\log_b a$.

   b) $\log_a(b+1)$.

   c) $\log_a(b)+1$.

   d) $\log_a(b)+2$.

   e) $\log_a(b)-2$.

3. Resolva as equações:

   a) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_9 x) = 1$

   b) $\log_3(2x-1) = 4$

   c) $\log_2[\log_x(x+2)] = 1$

4. (UFSC) Qual o valor de x compatível para a equação $\log(x^2-1)-\log(x-1) = 2$?

5. (PUC - RS) Escrever $b^{log_b a} = b^{-2}$, equivale a escrever:

   a) $a = \dfrac{1}{b^2}$.

   b) $b = a^2$.

   c) $a = b^2$.

   d) $b^2 = -a$.

   e) $b = \dfrac{1}{a^2}$.

6.8.5 Inequações logarítmicas

Inequações logarítmicas caracterizam-se por envolverem a função logarítmica, sendo assim, utilizaremos conceitos de função logarítmica já mencionados anteriormente.

- Na função crescente, $f(x_2) > f(x_1)$ implica $x_2 > x_1$. A $f(x) = \log_a x$ será crescente quando $a > 1$. Portanto, $\log_a x_2 > \log_a x_1$ acarreta $x_2 > x_1$.

- Na função decrescente, $f(x_2) > f(x_1)$ implica $x_2 < x_1$. A $f(x) = \log_x a$ será decrescente quando $0 < a < 1$. Portanto, $\log_a x_2 > \log_a x_1$ acarreta $x_2 < x_1$.

Exemplos:

- Se $\log_2 x > \log_2 5$, então $x > 5$

- Se $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 5$, então $0 < x < 5$

Exercício resolvido: Resolva a inequação $\log_3(x+1) < 2$.

Resolução: A condição de existência necessária é: $x+1 > 0$. Sendo assim, temos $x > -1$.
Em seguida, substituiremos 2 por $\log_3 9$ na inequação:

$$\log_3(x+1) < \log_3 9.$$

Como a base é maior que 1, conservamos o sinal da desigualdade e resolvemos $x+1 < 9$. Portanto, $x < 8$. Dessa forma, teremos como solução da inequação a intersecção dos conjuntos dos números reais dados nas desigualdades anteriores, ou seja,

$$S = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 8\} \ .$$

Exercício resolvido: Resolva a inequação $\log(4x+2) - \log(x-7) > 1$.

Resolução: Inicialmente devemos garantir que os logaritmos existam. Portanto:

$$4x + 2 > 0 \Longrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$x - 7 > 0 \Longrightarrow x > 7$$

A inequação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\log \frac{4x+2}{x-7} > \log 10.$$

A função logaritmo decimal é crescente, então:

$$\frac{4x+2}{x-7} > 10 \Rightarrow 4x + 2 > 10x - 70 \Rightarrow 72 > 6x \Rightarrow x < 12.$$

Como, para a existência dos logaritmos, devemos ter $x > 7$, a solução da inequação é

$$7 < x < 12.$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R}; 7 < x < 12\}$.

Exercícios:

1. Resolva as inequações logarítmicas:

   a) $\log_3(x+1) < 2$

   b) $\log_2(x^2 + x) < \log_2 6$

   c) $\log_6(5x+1) > \log_6(4x-2)$

   d) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5) > -4$

   e) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(3x-2) \geqslant -2$

   f) $\log_7(2x-1) - \log_7(x+2) < \log_7 3$

2. (UFOP) Resolva a inequação $\log_2(x{-}3) + \log_2(x{-}2) < 1$ e determine o seu conjunto solução.

3. (FUVEST) O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação $log_2(2x+5) - log_2(3x{-}1) > 1$ é o intervalo:

   a) $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$. b) $\left]\frac{7}{4}, \infty\right[$. c) $\left]-\frac{5}{2}, 0\right[$. d) $\left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$. e) $\left]0, \frac{1}{3}\right[$.

Capítulo 7

Gabarito

Capítulo 1: Conjuntos

1.1. Representação dos Conjuntos

1. a) $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
   b) $D = \{2, 3, 4, 5, ...\}$
   c) $E = \{$ Aquário, Gêmeos, Áries, Touro, Câncer, Leão, Virgem, Libra, Escorpião, Sagitário, Capricórnio, Peixes $\}$

2. a) $G = \{x \mid -4 \leq x \leq 4\}$
   b) $H = \{x \mid x$ é múltiplo de 5 e $x \geq 5\}$
   c) $I = \{x \mid x$ é o nome dos primeiros quatro meses do ano. $\}$

1.2. Pertinência

1. a) $10 \in A$ e $10 \notin B$
   b) $25 \notin A$ e $25 \in B$
   c) $16 \in A$ e $16 \in B$
   d) $3 \notin A$ e $3 \notin B$

2. a) $3 \in A$
   b) $1 \notin B$
   c) $4 \in A$ e $4 \in B$

1.3. Conjunto Vazio

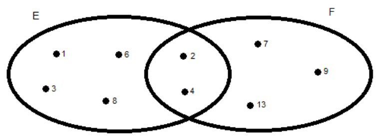
1. $A = \emptyset$ e $C = \emptyset$

1.4. Relação de Inclusão

1. a) V b) F c) F
   d) V e) V

1.5. Representações Gráficas

1. a)



   b) Deixamos como tarefa do aluno.
   c) Deixamos como tarefa do aluno.

1.6. Complementar de um conjunto

1. a) $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
   b) $\overline{B} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
   c) $\overline{C} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20\}$
   d) $\overline{D} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19\}$

1.7. União e intersecção

1. a) V b) F c) V d) F

2. $A \cap B = \{b, c, d\}$;
   $A \cap C = \{c\}$;
   $B \cap C = \{c, e\}$;
   $A \cap B \cap C = \{c\}$;
   $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$;
   $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f\}$.

3. $X = \{1, 2\}$

1.8. Diferença entre conjuntos

1. a) $\{a, b\}$ b) $\{e, f, g\}$
   c) $\{b\}$ d) $\{a, b\}$
   e) $\{a, b, c\}$ f) $\{a, c, e, f, g\}$

2. $X = \{1, 3, 5\}$

1.9. Conjuntos Numéricos:

1.9.1. Conjuntos Naturais

1. 14

1.9.2. Números Inteiros

1. a) V b) F c) V d) V e) V

1.9.3. Números Racionais

1. a) V b) V c) F d) V e) F f) V
2. $\frac{2}{3} < \frac{11}{12} < \frac{15}{16} < \frac{18}{19} < \frac{47}{48} < 1$

1.9.4. Números Irracionais

1. a) $\in$ b) $\notin$ c) $\notin$ d) $\notin$

1.9.5. Números Reais

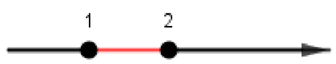
1. a) V b) V c) V d) F e) V

1.10. Cardinal de um conjunto:

1. a) $n(N) = 13$ b) $n(O) = 6$ c) $n(P) = 9$
2. a) $n(N \cup P) = 15$
   b) $n(N \cup O \cup P) = 21$
   c) $n(O \cup P) = 15$

1.11. Intervalos:

1. a)



b)

c)

d)

2. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$
   b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$
   c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$
   d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
   e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

Capítulo 2: Frações

2.1 e 2.2. Comparação de frações e simplificação

1. a) $\frac{7}{5}$ é maior;
   b) $\frac{2}{3}$ é maior;
   c) $\frac{8}{7}$ é maior;
   d) $\frac{3x}{7}$ é maior.
2. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$;
   c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{x}{3y}$.
3. a) V;
   b) F, pois $\frac{5}{2}$ é maior que $\frac{2}{5}$;
   c) V;
   d) V.

2.3. Adição e Subtração de Frações

1.
   a) $\frac{8}{3}$;
   b) $\frac{23}{72}$;
   c) $\frac{17x}{12}$;
   d) $\frac{35x+13}{14}$;
   e) $\frac{12x+15y}{10}$;
   f) $(x+1)^2$;
   g) $\frac{79}{36}$;
   h) $\frac{5x^2+15}{9x}$;
   i) $\frac{y+7+(x+7)^5}{x}$;
   j) $\frac{ay-bx}{by}$.

2.4. Multiplicação e Divisão de Frações

1.
   a) $\frac{6}{5}$;
   b) $21ab$;
   c) $\frac{1}{4}$;
   d) $x+2$;
   e) $\frac{h^3+4h^2}{9}$;
   f) $\frac{d^3\sqrt{5}}{10}$;
   g) $2xy$;
   h) 2.

Capítulo 3: Potências, raízes, e produtos notáveis

3.1. Potências

1. e
2. b
3. d
4. e
5. c
6. d
7. b
8. b
9. a

3.2. Raízes:

1. a) 28
   b) $10\sqrt{2}$
2. b
3. c
4. -2
5. b
6. a) 2
   b) 5
   c) $5\sqrt{15}$
7. b
8. 25
9. b

3.3, 3.4 e 3.5. Propriedade distributiva, produtos notáveis e racionalização (segundo caso)

1. c
2. a) $9m^4 + 24m^2n + 16n^2$
   b) $\dfrac{5\sqrt{7}-10}{3}$
   c) $\dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{4}$
3. d
4. c
5. a
6. c
7. a) $\dfrac{4}{25} + \dfrac{4}{5}x + x^2$
   b) $a^6b^9 + 6a^4b^6 + 12a^2b^3 + 8$

Capítulo 4: Polinômios

4.1. Fatoração

1. a) $(a+d)(b+c)$
   b) $(x-b)(x+a)$
2. a) $(3x-4)(3x+4)$
   b) $(5-2am^3)(5+2am^3)$
3. $(a+b)(a^2-ab+b^2)$
4. $(x-1)^2x$
5. $x^{10}-x^4$

4.2. Operações com polinômios

1. $n = \dfrac{3}{5} \quad m = 2 \quad p = 6$
2. a) $x^6 - 2x^4 + x$.
   b) $3x^7 + 6x^6 - 4x^5 - 3x^3 - 2x^2 - 4x$.
3. a) $Q = x-4$, $R = 0$
   b) $Q = x+3$, $R = 0$
   c) $Q = x^2+5$, $R = 1$
4. d.

4.2.1. O dispositivo de Briot-Ruffini

2. b
3. $p = -\dfrac{7}{3}$

Capítulo 5: Identidades e equações

5.1. Raiz de uma equação

1. a) 2. b) 3 c) $\dfrac{18}{7}$ d) 0.

5.2. Grau de uma equação

1. 2
2. 10
3. 1

5.4. Equação do primeiro grau

1. 43
2. 14
3. 17
4. 10
5. 20 e 30
6. 10

5.5. Princípio de fator comum

1. $ax \cdot (-2x+3)$
2. $3b \cdot (m{-}x{-}n)$
3. $2xy \cdot (x+4{-}2z)$

5.6. Conjunto solução

1. a) $S = \{2\}$
   b) $S = \{5\}$
   c) $S = \left\{\frac{-33}{7}\right\}$
   d) $S = \left\{\frac{13}{12}\right\}$
   e) $S = \left\{\frac{3}{8}\right\}$
   f) $S = \left\{\frac{-3}{2}\right\}$
2. d
3. c

5.7. Módulos

1. a) $S = \{(1, -5)\}$
   b) $S = \left\{\left(\frac{-2}{3}, \frac{4}{3}\right)\right\}$
   c) $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$
   d) $S = \varnothing$
   e) $S = \{(-3, 3)\}$
   f) $S = \varnothing$
2. a
3. c
4. e

5.8. Sistemas de duas equações lineares

1. c
2. 5 e 9
3. $(0,0), (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
4. $k \neq -6$
5. 2
6. a) $m \neq -1$ e $m \neq 2$
   b) $m = -1$
   c) -4
7. 5

5.9. Equação de segundo grau

1. $2(r^2 + 1)$
2. 8
3. quando $a = -\frac{1}{4}$
4. 9
5. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
6. 10
7. $3\sqrt{2}$
8. $m = 3$
9. Dica: Analise o o que acontece quando x é muito próximo de a, b e c.

5.10. Inequações

1. $S = \mathbb{R}$.
2. $S = \{x \in \mathbb{R}; -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$ ou $0 < x < \frac{1}{2}\}$.
3. $S = \{x \in \mathbb{R}; x \leq -1\}$.
4. $S = \{x \in \mathbb{R}; x < -2$ ou $x > -\frac{1}{2}\}$.
5. $S = \{x \in \mathbb{R}; 1 < x \leq 4\}$.
6. $S = [-3, -2) \cup [1, +\infty)$.

Capítulo 6: Funções

6.1. Conceitos

1. a) É função
   b) Não é função
   c) É função
2. c
3. a) $D(f) = \mathbb{R}$
   b) $D(f) = \mathbb{R} - \{8\}$
   c) $D(f) = \mathbb{R}$
4. b
5. a) $k = -10$
   b) $k = 0,8$
   c) $k = |5|$
6. Crescente: $\{1, 2\}$, $\{4, 5\}$, $\{8, 10\}$
   Decrescente: $(2, 3\}$, $(5, 6\}$
7. b
8. A função é ímpar.

6.2. Função afim

1. a) afim.
   b) afim, linear e identidade.
   c) afim e linear.
   d) afim e constante.
   e) afim.
2. a) $x = 4$
   b) $x = -25$
3. b
4. b
5. $x > 5$
6. De $\{1, 4)$ o estacionamento B é mais vantajoso.
   $E(a) = E(b)$ na quarta hora.
   A partir de 4 horas o estacionamento A é mais vantajoso.
7. e

6.3. Função quadrática

1. a) Para cima, $a > 0$
   b) Para baixo, $a < 0$
   c) Para cima, $a > 0$
   d) Para baixo, $a < 0$
2. $-\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$
3. $k = \frac{1}{3}$
4. a) $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$
   b) $V\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$
   c) Valor de mínimo
   d) 1
5. e
6. c
7. a) $f(x) > 0$ quando $x \neq 1$ e $f(x) = 0$ quando $x = 1$
   b) $f(x) < 0$ quando $x \neq 2$ e $f(x) = 0$ quando $x = 2$.

6.4. Função modular

1. d
2. b
3. d
4. b
5. b
6. b
7. e

6.5. Função composta e inversa

1. -2
2. c
3. c
4. b
5. d
6. a
7. a
8. $f[g(x)] = 4x^2$;
   $g[f(x)] = -2x^2 - 4x - 3$
9. a) $f[g(x)] = -6x + 5$; $g[f(x)] = -6x + 4$
   b) $f[g(x)] = 8x + 2$; $g[f(x)] = 8x + 1$
   c) $f[g(x)] = -6x + 3$; $g[f(x)] = -6x + 39$

6.6. Funções trigonométricas

1. a
2. a
3. b
4. a
5. b
6. d
7. b
8. c
9. b

6.7. Função exponencial

1. a) C
   b) D
   c) D
   d) C

6.7.1 Equações

1. a)$x = \frac{3}{4}$
   b)$x = 0$
   c)$x = 2$
   d)$x_1 = 3$ e $x_2 = 2$
   e)$x = 3$
   f)$x = 1$
2. e
3. c

6.7.2. Inequações

1. $\{x \in \mathbb{R} | x > -7\}$
2. a
3. a) $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leqslant 2\}$
   b) $\{x \in \mathbb{R} | x < -2 ou x > 3\}$
   c) $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x \leqslant 3\}$
   d) $\{x \in \mathbb{R} | 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
4. a

6.7.3. Funções de tipo exponêncial

1. e
2. 1
3. a
4. b
5. d
6. c

6.8. Função logaritmo

1. $D = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < \frac{1}{2}$ ou $x > 2$ e $x \neq 0\}$
2. b
3. 3
4. a
5. F, V, V

6. a

6.8.1. Propriedade dos logaritmos

1. a) b)3 c)
2. F, V, F
3. b
4. a) $1 + log_2 a + log_2 b - log_2 c$
   b) $3log_3 a + 2log_3 b - 4log_3 c$
   c) $3loga - 2logb - \frac{1}{2}logc$
5. b

6.8.2. Mudança de base

1. $\frac{1-a-b}{1-a}$
2. e
3. e
4. a) $\frac{log_5 2}{log_5 3}$
   b) $\frac{log_5 9}{log_5 10}$
5. a) $\frac{log_{10} 2}{log_{10} 2}$
   b) $\frac{log_{10} 4}{log_{10} 7}$
   c) $\frac{log_{10} 8}{log_{10} 0,1}$
6. d
7. a
8. $\frac{3}{2}$

6.8.3. Logaritmo neperiano

1. b
2. b

6.8.4. Equações logarítmicas

1. e.
2. e.
3. a) $S = \{3\}$.
   b) $S = \{41\}$.
   c) $S = \{2, 4\}$.
4. 99.
5. a.

6.8.5. Inequações logarítmicas

1. a) $S = \{\, x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 8\}$
   b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1 \text{ ou } 0 < x < 2\}$
   c) $S = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\}$
   d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < -5 \text{ ou } 1 < x < 3\}$
   e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{5+\sqrt{109}}{6}\right\}$
   f)$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\}$
2. $S =]3, 4[$.

Referências bibliográficas

[1] FILHO, B. B.; SILVA, C. X. da. **Matemática aula por aula.** São Paulo: FTD, 2000.

[2] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Disponível em:<https://doraci.com.br/downloads/matematica/fund-mat-elem_01.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2020.

[3] JUNIOR, J. R. G e CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática:** 6º ano. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018. 324 p.

[4] WAGNER, E. **Matemática 1.** 1ª ed. Rio de Janeiro, FGV, 2011. 340 p.