UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

MINICURSOS PET MATEMÁTICA
NOÇÕES BÁSICAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E ÁLGEBRA LINEAR COM O MAPLE

Angela Mallmann Wendt
Fabrício Fernando Halberstadt
Fernanda Ronssani de Figueiredo
Lauren Maria Mezzomo Bonaldo
Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Lyrio Bidel

Santa Maria, agosto de 2010.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este minicurso foi desenvolvido, pelos bolsistas do Grupo PET Matemática – Programa de Educação Tutorial – AngelaMallmannWendt, Fabrício Fernando Halberstadt, Fernanda Ronssani de Figueiredo e Lauren Maria MezzomoBonaldo,sob orientação do Professor Tutor Antonio Carlos LyrioBidel, como uma proposta de qualificar a formação de bolsistas e acadêmicos na utilização de novas tecnologias aplicadas ao ensino e aprendizagem da matemática.

Neste minicurso serão abordados comandos básicos do MAPLE que podem ser utilizados no cálculo de limites, derivadas e integrais, gráficos bidimensionais e tridimensionais, bem como animações para os mesmos. E ainda, uma breve introdução aos principais comandos e recursos referentes ao uso do software na Álgebra Linear.

Esta apostila contempla de forma sucinta e introdutória os principais recursos do MAPLE, uma vez que serve de apoio didático de um minicurso de curta duração.

1. NÚMEROS

De maneira geral, o Maple trabalha com números exatos na forma racional.

>**(37*5+13/7)^2;**

$$\frac{1710864}{49}$$

Para obtermos este resultado na sua forma decimal utiliza-se o comando ***evalf***.

>**(37*5+13/7)^2;**

$$\frac{1710864}{49}$$

>**evalf(%);**

34915.591836734693878

>**evalf[40](%%);**

34915.59183673469387755102040816326530612

>**evalf[60](%%%);**

34915.5918367346938775510204081632653061224489795918367346939

Observe que em ***evalf [40](%%)*** e ***evalf [60](%%%)***o número entre parênteses é o número de casas decimais. A quantidade de sinais de porcentagem remete ao cálculo efetuado anteriormente, por exemplo ***evalf [60](%%%)*** representa a forma decimal do cálculo realizado há três cálculos anteriores em ***(37*5+13/7)^2***.

Outra forma de trabalhar com números decimais é a colocação de um ponto após um dos números constantes na operação.

>**1./3;**

0.3333333333

```
>(37*5+13/7)^2;
```

$$\frac{1710864}{49}$$

```
>(37*5+13./7)^2;
```

$$34915.59185$$

```
>(37.*5+13/7)^2;
```

$$34915.59185$$

```
>(37*5+13/7)^2.;
```

$$34915.59185$$

Para um número maior de casas decimais, deve-se defini-lo através do comando ***Digits***.

```
>Digits := 20;
```

$$Digits:=20$$

```
>(37*5+13./7)^2;
```

$$34915.591836734693876$$

Ao tentarmos realizar um cálculo que envolva variáveis, é necessário assumi-las como variáveis inteiras.

```
>2*sin(n*Pi)/3!;
```

$$\frac{1}{3}\sin(n\,\pi)$$

```
>assume(n, integer);
```

```
>2*sin(n*Pi)/3!;
```

$$0$$

Assim, o Maple assumirá n como uma variável inteira, e será mostrada com um til após a variável, da forma ***n~***, para o usuário visualizar que essa variável possui uma determinada propriedade atribuída pelo comando ***assume***.

>**cos(3*n*Pi)/2;**

$$\frac{(-1)^{(3n\sim)}}{2}$$

1.1 Números Complexos

Ao calcular as raízes quadradas de

>**z := (-8) ^ (1/2);**

$$z := \sqrt{-8}$$

podemos notar que o Maple não escreve o resultado na forma usual a+bi, para isso é necessário a utilização do comando ***simplify***.

>**simplify(z);**

$$2I\sqrt{2}$$

Para as operações básicas, o resultado obtido será sempre na forma a + bi.

>**(13+5*I)/(2+I);**

$$\frac{31}{5} - \frac{3}{5}I$$

Exercícios

1- Encontre as raízes quartas de:

a) 121

b)-625

2. ALGUMAS FUNÇÕES MATEMÁTICAS NO MAPLE

Abaixo apresentamos uma pequena lista da sintaxe de algumas funções matemáticas no Maple:

- funções trigonométricas: ***sin(x), cos(x), tan(x), cot(x), sec(x), csc(x);***
- funções trigonométricas inversas: ***arcsin(x), arccos(x), arctan(x), arccot(x), arcsec(x), arccsc(x);***
- função exponencial de base e: ***exp(x);***
- função logarítmica de base e: ***ln(x);***
- função logarítmica de base a, sendo a>0 qualquer: ***log[a](x);***
- funções hiperbólicas: ***sinh(x), cosh(x), tanh(x), sech(x), csch(x), coth(x);***
- funções hiperbólicas inversas: ***arcsinh(x), arccosh(x), arctanh(x), arcsech(x), arccsch(x), arccotgh(x).***

Observe que:

>**arccot(0);**

$$\frac{\pi}{2}$$

>**arccot(.0);**

$$1.570796327$$

Para obter a lista completa de funções trigonométricas digite ***>?inifcn***.

3. FUNÇÕES

Podemos definir uma função no Maple por meio do sinal **->**(sinal de menos seguido do sinal de maior).

>**f:= x -> 2*x^2 - 7;**

$$f := x \to 2x^2 - 7$$

>**f(13);**

$$331$$

Observe que se não utilizarmos esse comando, o Maple não calculará o valor de f(13).

>**f:= 2*x^2 - 7;**

$$f := 2x^2 - 7$$

>**f(13);**

$$2\,x(13)^2 - 7$$

3.1 Atribuindo nomes

Como muitas vezes é preciso realizar cálculos extensos, é necessário nomear as equações. Para isso, utiliza-se o sinal de igualdade "=".

>**equacao := 2*x^2+5*x-3=0;**

$$equacao := 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

Para encontrar as raízes da equação usa-se o comando ***solve***.

>**solve(equacao);**

$$\frac{1}{2}, -3$$

Podemos também nomear as soluções por meio dos comandos ***nome da primeira solução:= %[1]; e nome da segunda solução:= %%[2];***.

>**x1 := %[1];**

$$x1 := \frac{1}{2}$$

>**x2:= %%[2];**

$$x2 := -3$$

Note que o sinal de igualdade somente, não define uma função, ela não muda o valor da variável.

>**y=x+2;**

$$y = x + 2$$

>**y;**

$$y$$

Mas com o comando "**:=**" temos:

>**y:=x+2;**

$$y := x + 2$$

>**y;**

$$x + 2$$

Quando não quisermos mais trabalhar com a atribuição que fizemos, é só utilizar

>**y:='y';**

$$y := y$$

3.2 Simplificando Expressões

Os comandos mais usados para simplificar expressões algébricas são: **expand, normal, simplify, collect, combine** e **factor.**

3.2.1 Expand

O comando ***expand*** serve para expandir as expressões no sentido de tirar os parênteses, e serve também para expandir funções trigonométricas, logarítmicas, etc. Por exemplo:

>expand((x-7)^5);

$$x^5 - 35x^4 + 490x^3 - 3430x^2 + 12005x - 16807$$

O mesmo exemplo pode ser desenvolvido da seguinte maneira:

> (x-7)^5;

$$(x-7)^5$$

>expand(%);

$$x^5 - 35x^4 + 490x^3 - 3430x^2 + 12005x - 16807$$

Suponhamos que se deseja encontrar o polinômio cujas raízes são:

-1, 1, 7, 3, 5

Então, temos que construir o seguinte polinômio (x+1)*(x-1)*(x-7)*(x-3)*(x-5). A maneira mais simples de resolver este problema é usando o comando ***expand***:

> expand ((x+1)*(x-1)*(x-7)*(x-3)*(x-5));

$$x^5 - 15x^4 + 70x^3 - 90x^2 - 71x + 105$$

Outros exemplos:

>cos(7*alpha+beta) = expand(cos(7*alpha+beta));

$$\begin{aligned}\cos(7\alpha+\beta) = {} & 64\cos(\beta)\cos(\alpha)^7 - 112\cos(\beta)\cos(\alpha)^5 \\ & + 56\cos(\beta)\cos(\alpha)^3 - 7\cos(\beta)\cos(\alpha) \\ & - 64\sin(\beta)\sin(\alpha)\cos(\alpha)^6 + 80\sin(\beta)\sin(\alpha)\cos(\alpha)^4 \\ & - 24\sin(\beta)\sin(\alpha)\cos(\alpha)^2 + \sin(\beta)\sin(\alpha)\end{aligned}$$

>ln(x^2*y^2) = expand(ln(x^2*y^2));

$$\ln(x^2 y^2) = \ln(x^2 y^2)$$

Em certos casos, queremos expandir uma expressão sem expandir certo pedaço. Para isso, devemos colocar a parte que queremos congelar como segundo argumento do comando ***expand***:

> (x + sin(gamma + delta)) ^ 2;

$$(x + \sin(\gamma + \delta))^2$$

>expand(%,sin);

$$x^2 + 2\sin(\gamma + \delta)\, x + \sin(\gamma + \delta)^2$$

Ou então se não definirmos uma restrição, teremos:

>expand(%);

$$x^2 + 2\,x\sin(\gamma)\cos(\delta) + 2\,x\cos(\gamma)\sin(\delta) + \sin(\gamma)^2\cos(\delta)^2 + 2\sin(\gamma)\cos(\delta)\cos(\gamma)\sin(\delta) + \cos(\gamma)^2\sin(\delta)^2$$

Um terceiro efeito do comando expand se refere a expressões com denominador. Pode-se colocar o denominador embaixo de cada numerador, sem expandir o denominador**:**

>expr:= (x+y)^2/(a+b)^2;

$$expr := \frac{(x+y)^2}{(a+b)^2}$$

>expand(expr);

$$\frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{2\,x\,y}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a+b)^2}$$

3.2.2*Normal*

Em determinadas situações temos funções muito complicadas e desejamos simplificá-la. Usamos, então, o comando ***normal(%).*** Por exemplo:

> (x^2-1)/(x^2-x-2);

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2}$$

>normal(%);

$$\frac{x-1}{x-2}$$

Ou então de maneira mais rápida e simples:

>normal((x^2-1)/(x^2-x-2));

$$\frac{x-1}{x-2}$$

> (x^20-1)/(x-1);

$$\frac{x^{20}-1}{x-1}$$

>normal(%);

$$x^{19}+x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^{9}$$
$$+x^{8}+x^{7}+x^{6}+x^{5}+x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1$$

3.2.3*Combine*

> (x^a)^2*x^b = combine((x^a)^2*x^b, power);

$$\left(x^{a}\right)^{2} x^{b}=x^{2 a+b}$$

Para usar este comando com eficiência é necessário conhecer as opções que devem ser oferecidas como segundo argumento. A sintaxe é: ***Combine(equação,opção)***. A opção pode ser: exp, ln, power, trig, Psi, polylog, radical, abs, signum, plus, atatsign,conjugate, plot, product ou range entre outras. A opção trig engloba todas as funções trigonométricas e a opção power expressões que envolvem potenciação.

> 4*sin(x)^3 = combine(4*sin(x)^3, trig);

$$4 \sin(x)^{3}=-\sin(3 x)+3 \sin(x)$$

>exp (sin(a)*cos(b))*exp(cos(a)*sin(b)) =
> combine (exp(sin(a)*cos(b))*
>exp (cos(a)*sin(b)), [trig,exp]);

$$e^{\sin(a) \cos(b)} e^{\cos(a) \sin(b)}=e^{\sin(a+b)}$$

Exercícios

2- Defina a função: $2x^4 + 7x^3 + 5x^2 - 3$ e encontre o valor de f(19).

3- Nomeie a seguinte função $x^2 + 5x - 6 = 0$, encontre as suas soluções e nomeie-as.

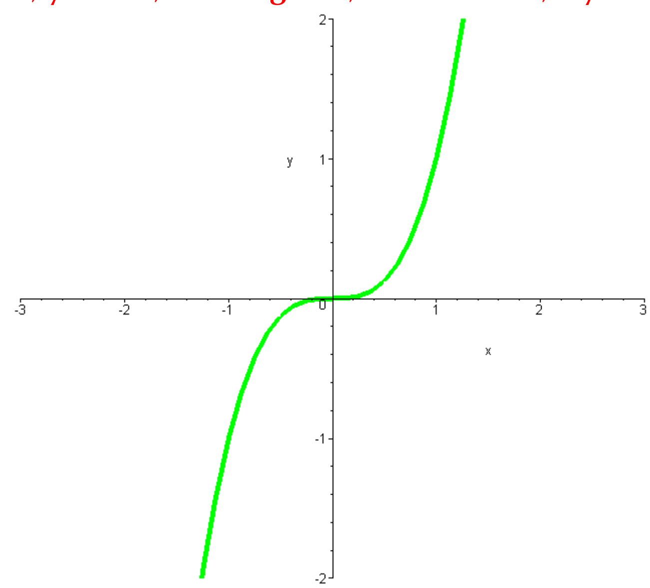
4- Encontre o polinômio cujas raízes são: 1, 2, 3, 4, e 5.

5- Expanda a função: sin(omega*(t+t0)+delta) sem expandir (t+t0).

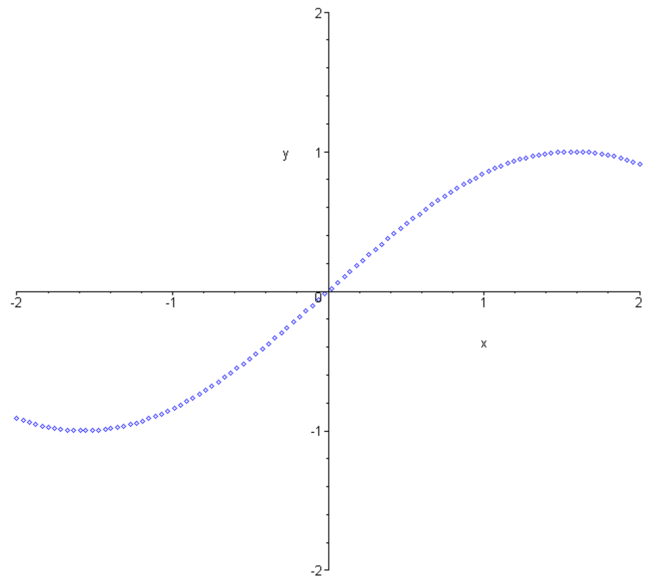
4. GRÁFICOS

O comando para traçar gráficos é o ***plot*** sendo que a sua forma geral é ***plot(f(x), x=a..b, y=c..d,opções)***; na qual x indica o intervalo das abscissas e y o intervalo das ordenadas. Em opções define-se o estilo da visualização gráfica. Pode-se definir uma cor pelo comando ***color*** (podendo ser:***aquamarine, black, blue, navy, coral, cyan, brown, gold, green, gray, grey, khaki, magenta,maroon, orange, pink, plum, red, sienna, tan, turquoise, violet, wheat, white, yellow***),***thickness***(espessura da linha) e ***style***(tipo de linha podendo ser ***point*** - mostra os pontos plotados- , ***patch*** - mostra o gráfico com linha contínua - ou ***line***- parecido com patch-).

>**plot (x^3, x=-3..3, y=-2..2, color=green, thickness=5, style=line);**



>**plot (sin(x), x=-2..2, y=-2..2, color=blue, style=point, numpoints=100);**

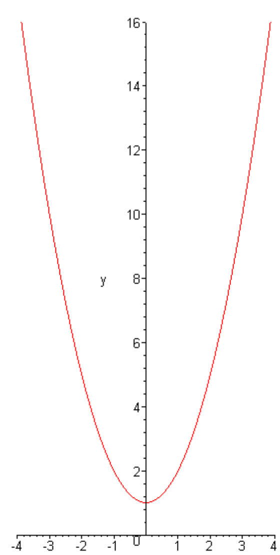


Observação: O Maple disponibiliza vários estilos de visualização da curva de um gráfico (***point, patchnogrid, line, hidden, wireframe, contour, patchcontour, polygonoutline, polygon, surface, surfacecontour, surfacewireframe, wireframeopaque, default***).

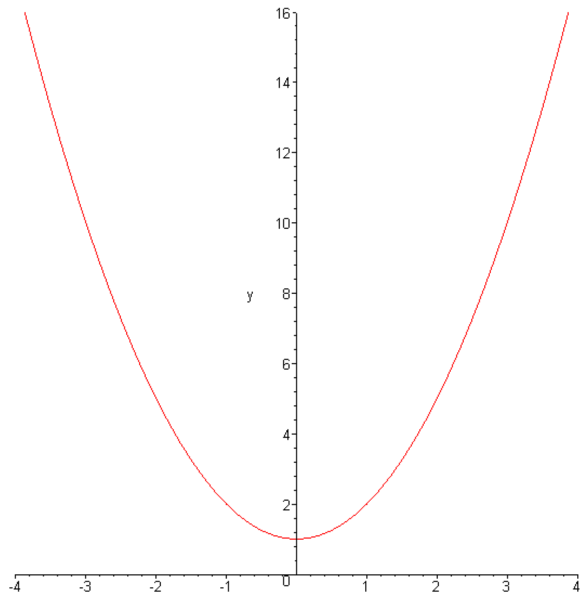
4.1 Escala

Utiliza-se ***constrained*** (ambos os eixos com a mesma escala) ou ***unconstrained*** (os eixos não possuem necessariamente a mesma escala).

> **plot(x^2+1,x=-4..4,y=0..16,scaling=constrained);**



>plot(x^2+1,x=-4..4,y=0..16,scaling=unconstrained);



Exemplo resolvido

1. Faça o gráfico da função f(x)= (4/sen x) + sen(4x) +3, com x variando no intervalo de -4 a 4.

Resolução:

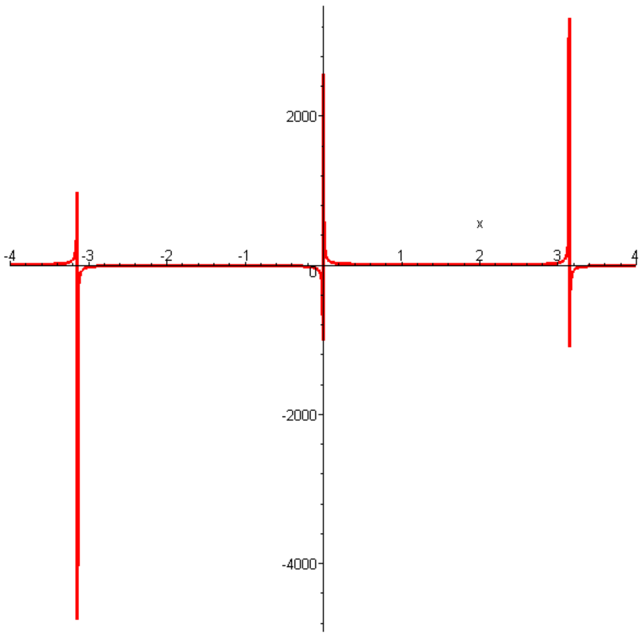
Nomeie a função:

>f:=x->4/sin(x)+sin(4*x)+3;

$$f := x \rightarrow \frac{4}{\sin(x)} + \sin(4x) + 3$$

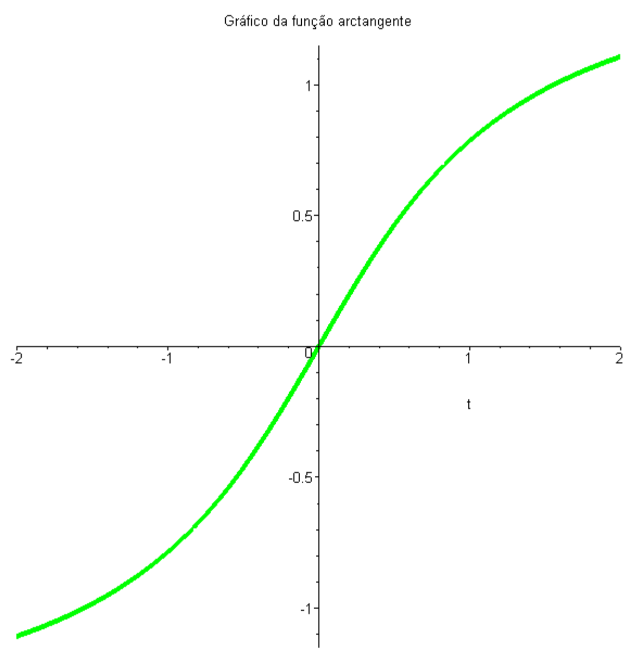
Plote a função no intervalo sugerido.

>**plot(f(x),x=-4..4,thickness=3);**



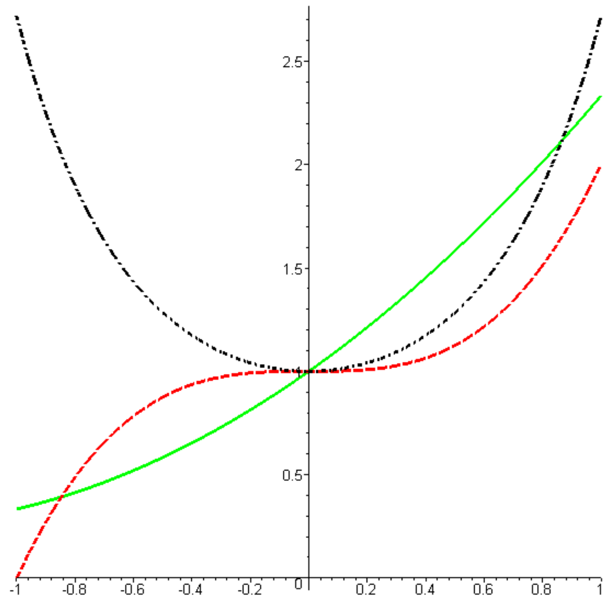
O Maple disponibiliza também recursos auxiliares na visualização dos gráficos.

>**plot(arctan(t),t=-2..2,color=green,thickness=5,title= \`Gráfico da função arctangente\`);**



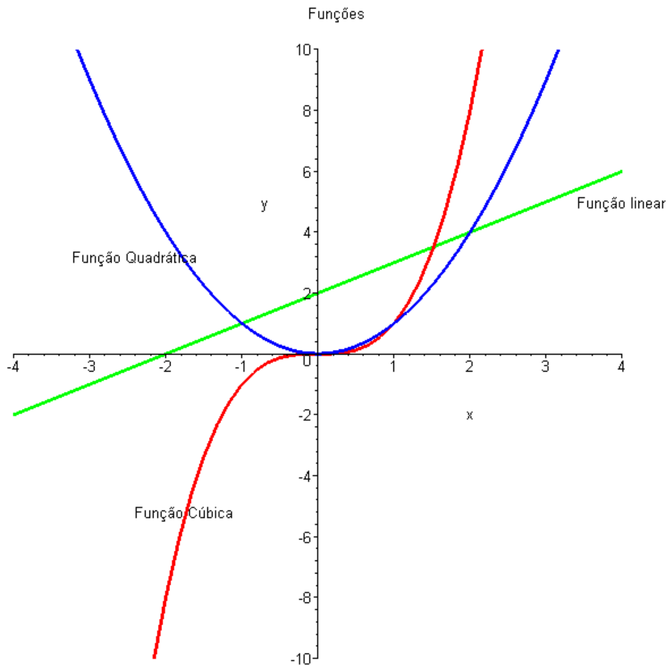
Podemos inserir mais de uma função em um mesmo gráfico.

```
>plot([exp(x^2),1+x^3,1+x+x^2/3],x=-
1..1,color=[black,red,green],thickness=3,linestyle=[DASHDOT,DASH,SOLID]);
```



Observação: Para trocar de linha sem executar o comando, é necessário que se tecle **SHIFT + ENTER**.

```
> restart:with(plots):
g:=plot([x^2,x^3,x+2],x=-4..4,y=-
10..10,thickness=3,color=[blue,red,green],title=`Funções`):
t1:=textplot([-2.4,3.2,`Função Quadrática`]):
t2:=textplot([-1.75,-5.2,`Função Cúbica`]):
t3:=textplot([4,5,`Função linear`]):
display([g,t1,t2,t3]);
```



Exercícios

6- Faça o gráfico das funções quadrática, cúbica e as bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares.

7- Verifique graficamente o que acontece com a função $f(x)=\ln(x^2)$ quando lim f(x) tende a zero.

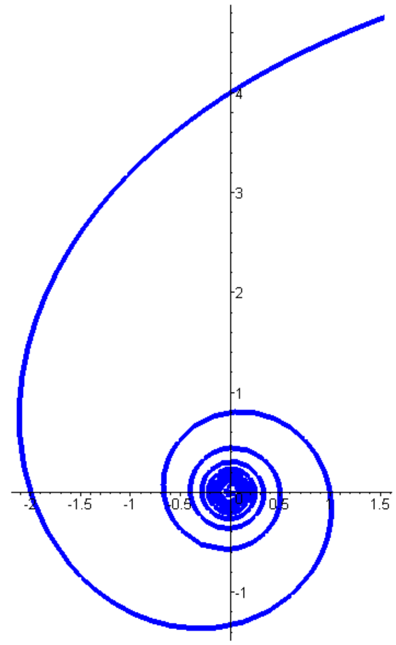
8- Plote em um mesmo gráfico as funções f(t)=cos(3t), g(t)=(1+t)/t e h(t)=3^t +4, com linhas de espessura 3, cores amarelo, verde e azul.

9- Num mesmo gráfico plote as seguintes funções: f(x)=ln(x), $g(x)= 1/(x^2+1)$, $h(x)= (x^2+1)/(x+1)$, com x variando de -4 a 4 e y de -10 a 10. Atribua cores diferentes para as funções e escreva o nome das funções no gráfico.

4.2.Funções Parametrizadas

O comando para plotar funções parametrizadas é: ***plot([x(t),y(t),t=a..b],opções)***; abaixo construímos o gráfico da curva paramétrica definida por: ***x(t)= tcos(2P/t), y(t)= tsen(2Pi/t), t= [0,20].***

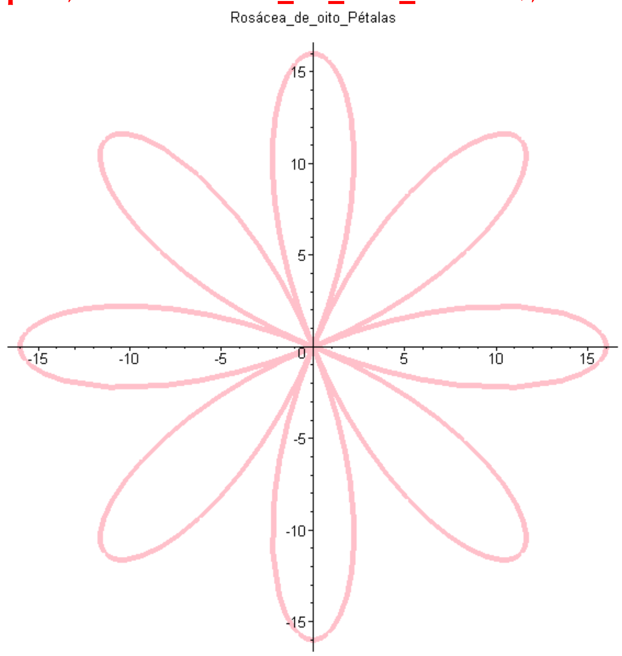
>**plot([t*cos(2*Pi/t),t*sin(2*Pi/t),t=0..5],thickness=5,color=blue,scaling=constrained);**



4.3. Coordenadas Polares

A forma para plotar gráficos de funções em coordenadas polares é ***polarplot(r(theta),theta=a..b,opções)*** *ou* ***plot([x(t), y(t),t=a..b],coords=polar)***.
Abaixo temos o gráfico de uma rosácea de oito pétalas:

```
>plot(-16*cos(4*theta),theta=0..2*Pi,coords=polar,
thickness=5,color=pink,title='Rosácea_de_oito_Pétalas');
```



Exercícios

10- Plote as funções g=-16cos(M*theta) e h=-16sen(M*theta) para M=4,5,6 e 7, com theta variando de 0 à 2π em coordenadas polares.

4.4. Funções Contínuas definidas por partes

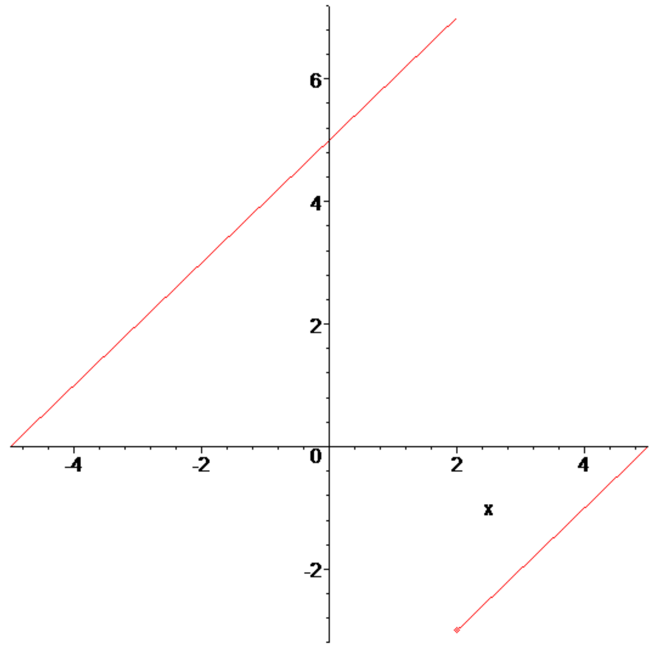
Para definir funções contínuas por partes é necessário utilizar o comando ***piecewise.***

Exemplos:

```
>F:=piecewise(x<2,x+5,x-5);
```

$$F := \begin{cases} x+5 & x<2 \\ x-5 & otherwise \end{cases}$$

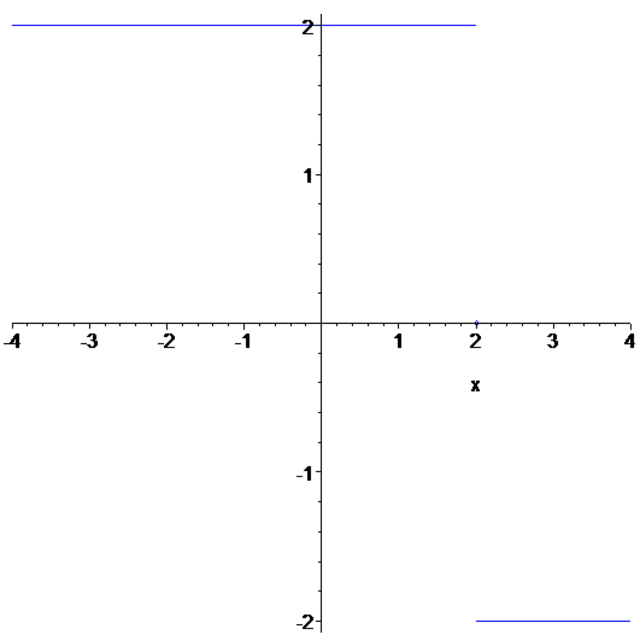
```
>plot(F,x=-5..5,discont=true);
```




```
>H:=piecewise(x<2,2,x=2,0,2<x,-2);
```

$$H := \begin{cases} 2 & x < 2 \\ 0 & x = 2 \\ -2 & 2 < x \end{cases}$$

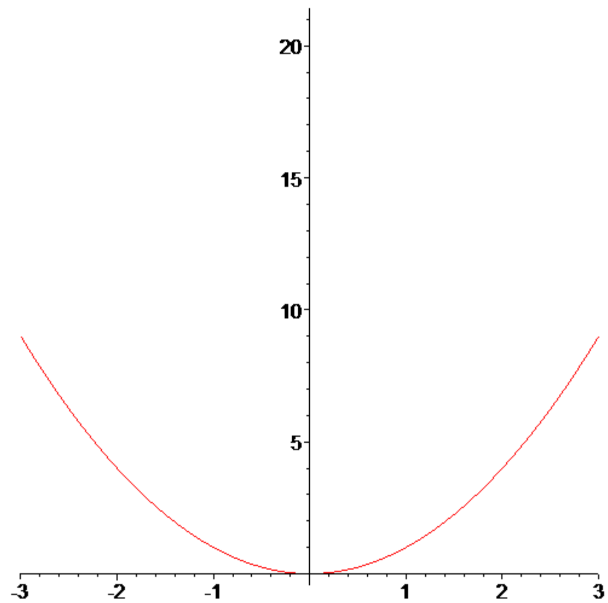
```
>plot(H,x=-4..4,color=blue,discont=true);
```



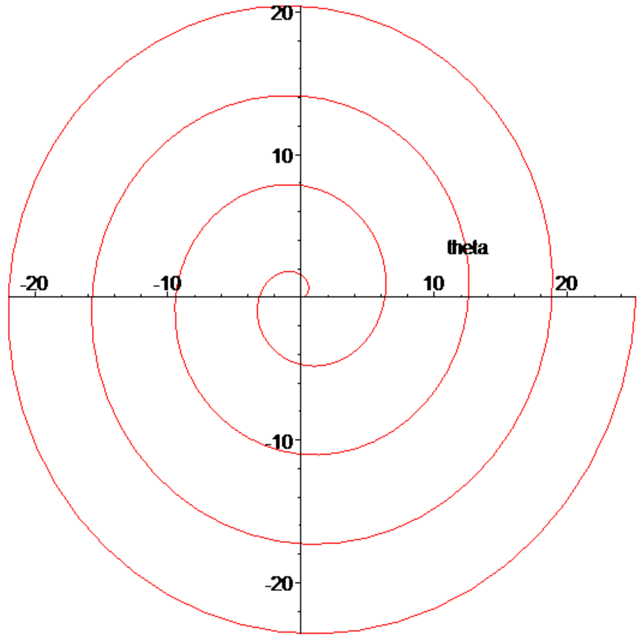
4.5. Animação de gráficos de uma variável

O comando para animação de gráficos é: ***plots[animate](f(x,t),x=a..b,t=c..d, frames=n);*** onde **f(x,t)** é uma expressão (ou função) de duas variáveis.
A variação de **x** corresponde ao domínio das funções envolvidas na animação, enquanto que a variação do **t** corresponde às posições intermediárias.
O valor **t=c** corresponde ao gráfico inicial e **t=d** corresponde ao gráfico final. O total de ***n*** gráficos construídos é controlado com a opção ***frames = n***.

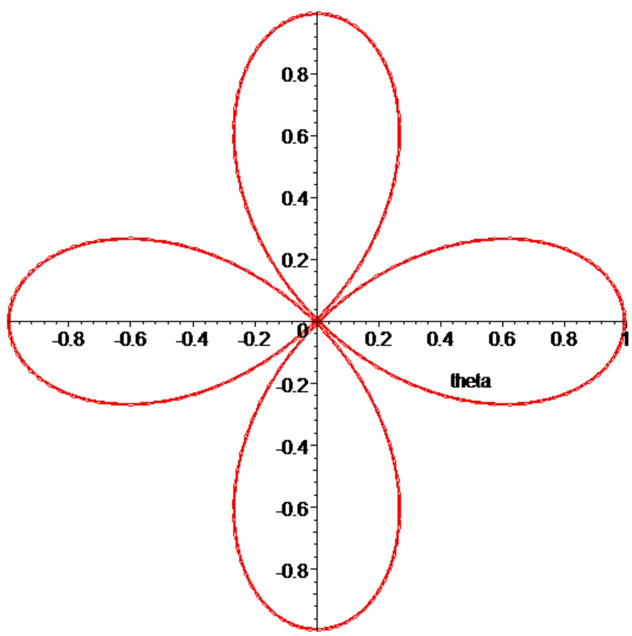
```
>with(plots):
>animate(x^2+t,x=-3..3,t=0..12,frames=12);
```



>**plots[animate](theta/t,theta=0..8*Pi,t=1..4,coords=polar,numpoints=200);**



>**plots[animate](cos(2*theta*t),theta=0..8*Pi,t=1..4,coords=polar,numpoints=200);**



Exercícios

11-Plote as seguintes funções, animando-as:

a) F: x+t, t=-6..6, x=-4..4
b) F:sen(t+theta), theta=0..10*Pi, t=-3..3
c) F: sin((log(x))*exp(t)), x=0..6, t=-20..20

4.6Gráficos de duas Variáveis

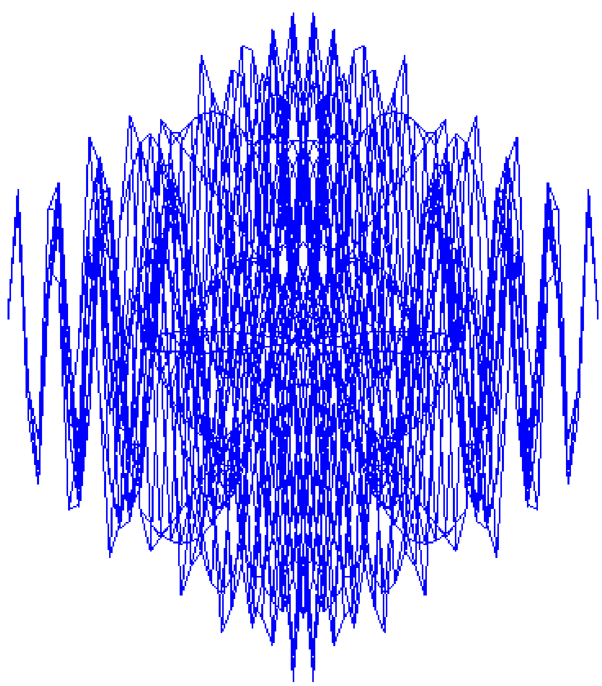
Para plotar um gráfico de uma função f(x,y) de duas variáveis é necessária a utilização do comando ***plot3d***, o qual possui algumas variações em sua sintaxe dependendo do que se deseja traçar. A sintaxe básica é a seguinte: **plot3d(f(x,y), x=a..b, y=c..d,opções);** onde os parâmetros "**f(x,y)**", "**x=a..b**" e "**y=c..d**" são obrigatórios enquanto que o parâmetro "**opções**" é opcional.

4.6.1 Alguns Comandos

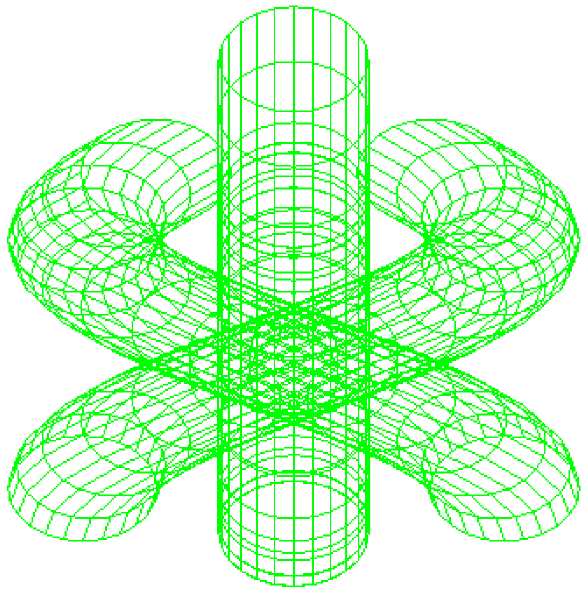
Os gráficos podem ser personalizados também com os comandos: ***grid=[m,n]*** usado para refinar o desenho do gráfico, **m** é o número de pontos na direção da primeira coordenada, e **n** no da segunda coordenada; ***style***, que pode ser: ***point, hidden, patch, wireframe, contour, patchnogrid, patchcontour,*** ou ***line*.**

Exemplos:

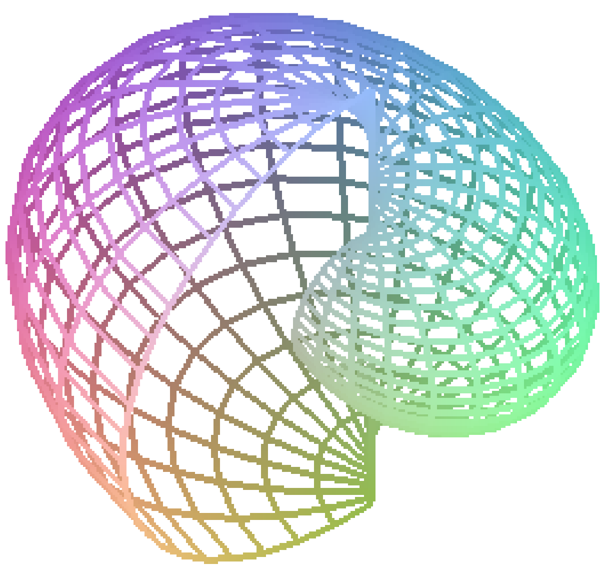
>**with(plots):plot3d(sin(x*y), x=-5..5, y=-5..5, grid=[30,30],style=line,color=blue);**



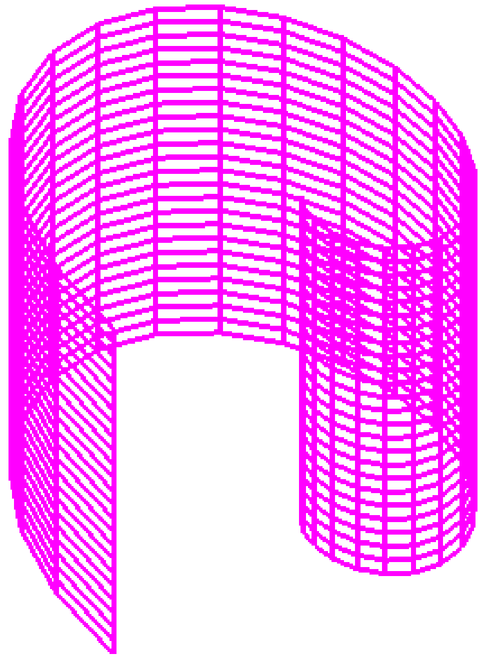
```
>c1:= [cos(x)-2*sin(0.4*y),sin(x)-2*sin(0.4*y),y]:
c2:= [cos(x)+2*sin(0.4*y),sin(x)+2*sin(0.4*y),y]:
c3:= [cos(x)+2*cos(0.4*y),sin(x)-2*cos(0.4*y),y]:
c4:= [cos(x)-2*cos(0.4*y),sin(x)+2*cos(0.4*y),y]:
plot3d({c1,c2,c3,c4},x=0..2*Pi,y=0..10,grid=[25,15],style=line,color=green);
```



```
>with(plots): sphereplot(1 + theta + phi, theta=0..2*Pi,
phi=0..Pi,style=line,thickness=3);
```



```
>with(plots):cylinderplot(3*theta + 2, theta=0..2*Pi, z=-5..5, color=magenta,
thickness=3, style=line);
```

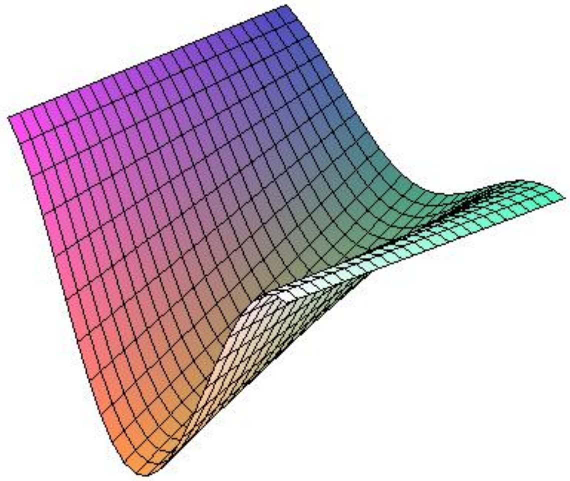


```
>with(plots): implicitplot3d((x^2+(9/4)*y^2+z^2-1)^3-x^2*z^3-
(9/80)*y^2*z^2=0, x=-1.5..1.5, y=-1.5..1.5,z=-
1.5..1.5,color=red,style=patch,numpoints=90000);
```

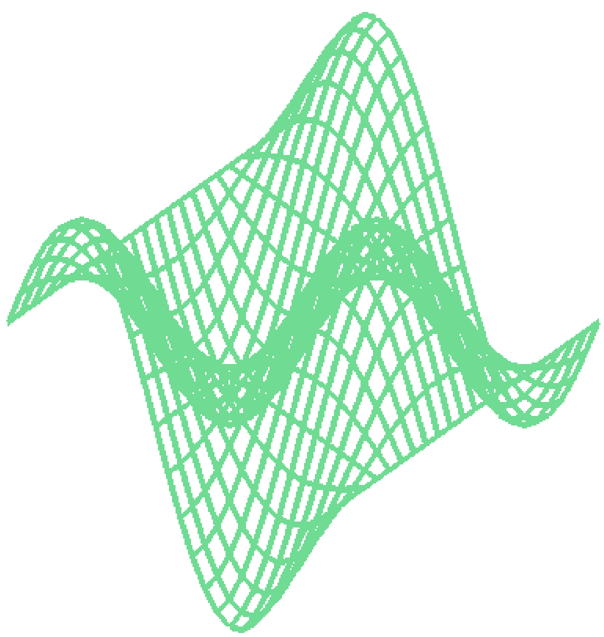
4.7. Animação de gráficos de duas variáveis

Exemplos:

>**with(plots):animate3d(x*sin(t*u),x=1..3,t=1..4,u=2..4);**



>**with(plots):animate3d(cos(t*x)*sin(t*y),x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi,t=1..2,style=line,thickness=4,color=aquamarine);**



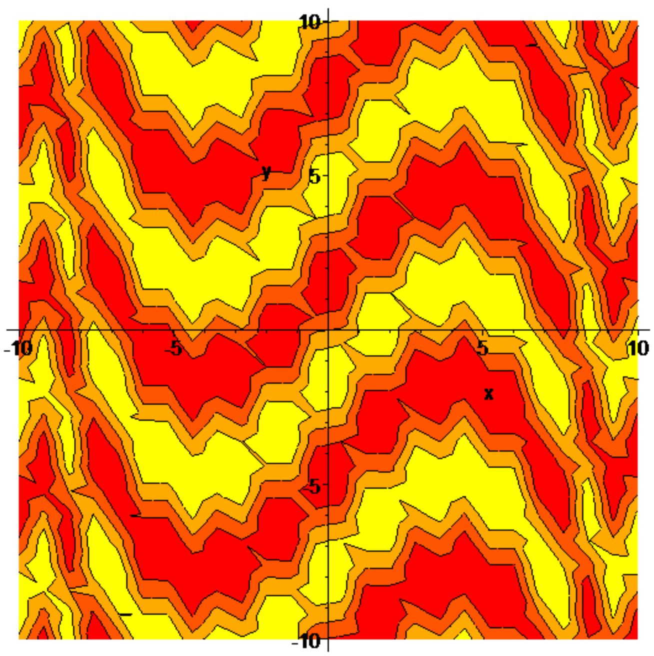
Exercícios

12-Anime novamente os gráficos dos exemplos acima, mas agora em coordenadas cilindrícas e esferícas

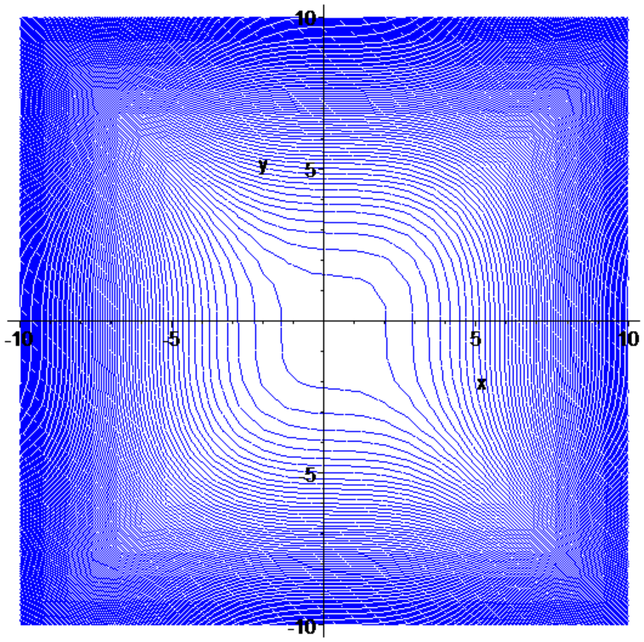
4.8. Curvas de nível

Exemplos:

>**with(plots):contourplot(sin(x^3-y),x=-10..10,y=-10..10,contours=3,filled=true);**



>contourplot(x^3+y^3-x^2+y^2+x-5,x=-10..10,y=-10..10,color=blue,contours=300);



5. LIMITES

Para calcular o limite de uma função quando a variável tende a certo valor, é necessário utilizar o comando ***limit***. Por exemplo, ***limit(f(t), t=a)***, onde ***a*** é a variação. ***Limit*** é utilizado para deixar indicado o limite, já o comando ***limit*** é utilizado para resolver o limite. O uso do ***Limit*** combinado com o ***limit*** pode melhorar a apresentação do resultado.

>**Limit(cos(a*x)/(b*x), x=1);**

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(a\,x)}{b\,x}$$

>**limit(cos(a*x)/(b*x), x=1);**

$$\frac{\cos(a)}{b}$$

>**Limit(cos(a*x)/(b*x), x=1)= limit(cos(a*x)/(b*x), x=1);**

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(a\,x)}{b\,x} = \frac{\cos(a)}{b}$$

5.1 Limite de funções

>**Limit((x^3+5*x^2)/(x^4+x^5),x=0)=limit((x^3+5*x^2)/(x^4+x^5),x=0);**

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 5\,x^2}{x^4 + x^5} = \infty$$

5.2 Limites Laterais

Para calcular limites laterais acrescenta-se uma opção ***left*** ou ***right*** aos comandos ***limit*** e ou ***Limit***. Se for acrescentada a opção ***left***, então, será calculado o limite lateral à esquerda. Se for acrescentado ***right***, então o limite será lateral à direita.

>**Limit(cos(Pi*x)/x, x=0, left)= limit(cos(Pi*x)/x, x=0, left);**

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\cos(\pi\,x)}{x} = -\infty$$

```
>Limit(cos(Pi*x)/x, x=0, right)= limit(cos(Pi*x)/x, x=0, right);
```

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\cos(\pi x)}{x} = \infty$$

```
>Limit(cos(Pi*x)/x, x=0)= limit(cos(Pi*x)/x, x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\pi x)}{x} = \mathit{undefined}$$

5.3 Pontos de Descontinuidade

Para calcular o limite de funções não contínuas, devemos utilizar os limites laterais.

```
>f:=piecewise(x<2,3*x,x>=2,x^3);
```

$$f := \begin{cases} 3\,x & x < 2 \\ x^3 & 2 \le x \end{cases}$$

```
>limit(f,x=2,left);
```

$$6$$

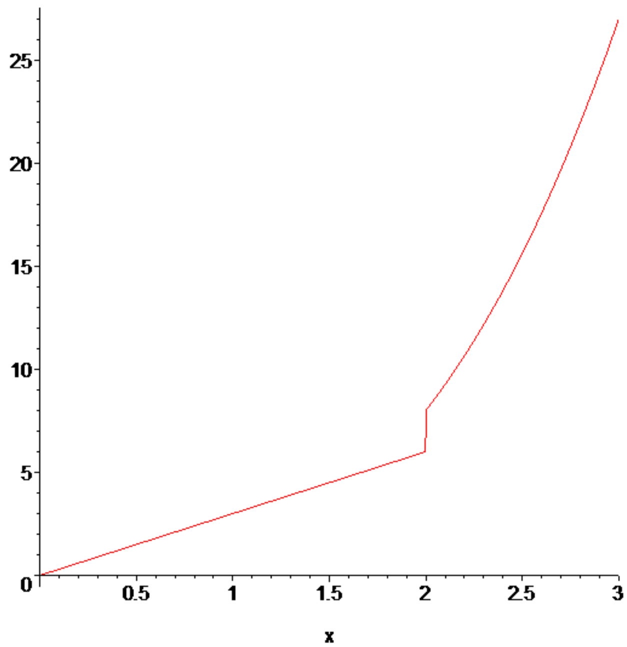
```
>limit(f,x=2,right);
```

$$8$$

```
>limit(f,x=2);
```

$$\mathit{undefined}$$

>plot(f,x=-0..3);



5.4 Limites no infinito

Para calcular limites no infinito, isto é, com a variável tendendo à +∞ ou à -∞, utilizamos ***-infinity*** ou ***infinity*** para a variável.

>Limit((1/x)*sin(x), x=infinity)=limit((1/x)*sin(x), x=infinity);

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

>Limit(x^3+x^2-3, x=-infinity)=limit(x^3+x^2-3, x=-infinity);

$$\lim_{x \to (-\infty)} x^3 + x^2 - 3 = -\infty$$

Exercícios

13-Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to \infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

b) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^x - 1}{x^3 - 4x} \right)$

c) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x) - x}{e^x + e^{-x} - 2} \right)$

d) $\lim_{x \to o} (5\, e^x)$

14- Calcule os seguintes limites, pela direita e pela esquerda:

a)
$$f := \begin{cases} 2\,x & x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x \end{cases}$$

b)
$$g := \begin{cases} x & 1 < x \\ -x & x < 1 \end{cases}$$

6. DERIVADAS

Para calcular derivadas utiliza-se basicamente o comando ***diff(f,x)***.

Exemplo:

>f:=x^3+tan(x)+100;

$$f := x^3 + \tan(x) + 100$$

>diff(f,x);

$$3x^2 + 1 + \tan(x)^2$$

Exercícios

15-Calcular a derivada de:

a) $f(x)=3x^3+12x+100$

b)$f(x)= \csc(x)+ \sin(x)$

c) $f(x)= 2. \cos(\cos(\ln(x)))$

6.1 Derivação de ordem *n* em relação a uma variável

Para calcular este tipo de derivada o comando é praticamente o mesmo, pois a ordem da derivada está relacionada com o número de "x" que atribuímos dentro do comando ***diff(f,x)***. Por exemplo, se quisermos saber qual é a derivada terceira de uma função f(x), basta colocarmos "três x_s" no comando, ou seja, ***diff(f,x,x,x).*** Portanto o comando para derivação de ordem n em relação a uma variável é ***diff(f,x,x,...,x).*** Para simplificar o comando ***diff(f,x,x,...,x)***, basta colocar ***diff(f,x$n)***.

Exemplos:

>f:= x^5+ x^3+ exp(x);

$$f := x^5 + x^3 + \mathbf{e}^x$$

>diff(f,x);

$$5x^4 + 3x^2 + \mathbf{e}^x$$

```
>diff(f,x,x);
```

$$20x^3+6x+e^x$$

```
>diff(f,x,x,x);
```

$$60x^2+6+e^x$$

```
>diff(f,x$4);
```

$$120x+e^x$$

```
>diff(f,x$9);
```

$$e^x$$

```
>diff(f,x$15);
```

$$e^x$$

6.2 Significado Geométrico

Exemplos:

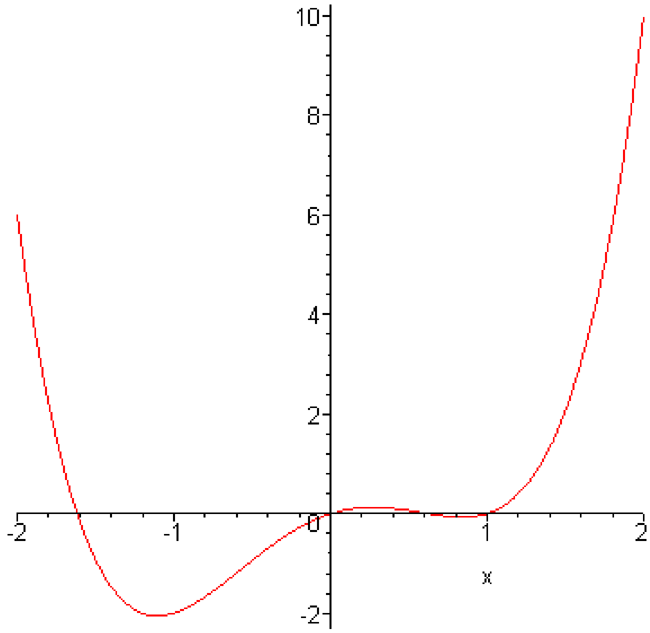
```
>f:=x->x^4-2*x^2+x;
```

$$f:=x\rightarrow x^4-2x^2+x$$

```
>f(3);
```

$$66$$

>**plot(f(x),x=-2..2);**



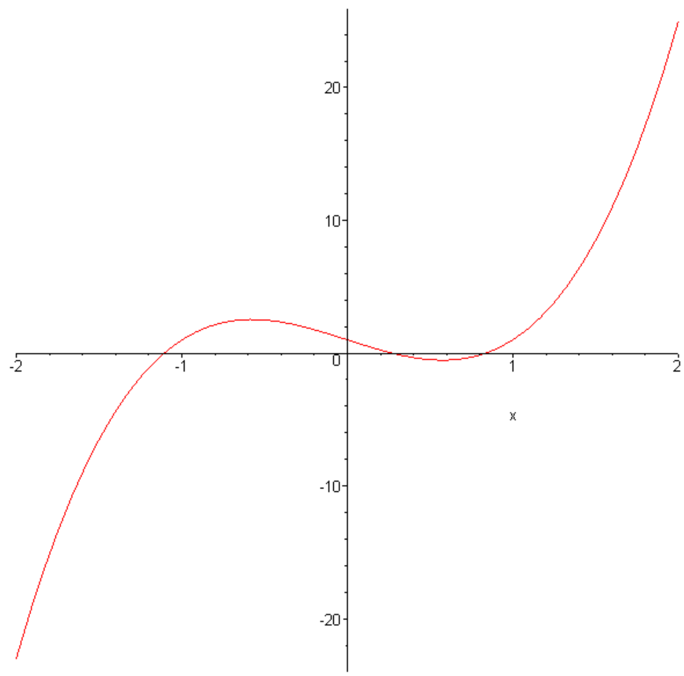
>**diff(f(x),x);**

$$4x^3-4x+1$$

>**fh:=x->diff(f(x),x);**

$$fh := x \to \mathrm{diff}(\mathrm{f}(x), x)$$

>**plot(fh(x),x=-2..2);**



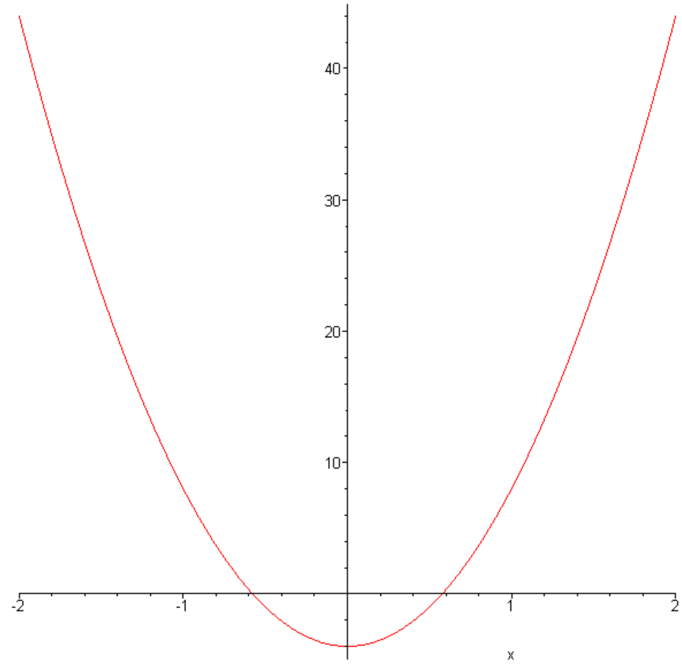
>**diff(f(x),x,x);**

$$12x^2-4$$

>**fj:=x->diff(f(x),x,x);**

$$fj := x \rightarrow \mathrm{diff}(\mathrm{f}(x), x, x)$$

```
>plot(fj(x),x=-2..2);
```



Exercícios

16-Calcule as derivadas primeira, segunda, e terceira das funções e plote seus gráficos.

a) sen (12x)+13cos(5x)

b) $\dfrac{ln(12x)+12x^2.cos(2x)}{x^3}$

c)sec(x).tan(x)

d)$x^{12} + 4x^3 + 1$

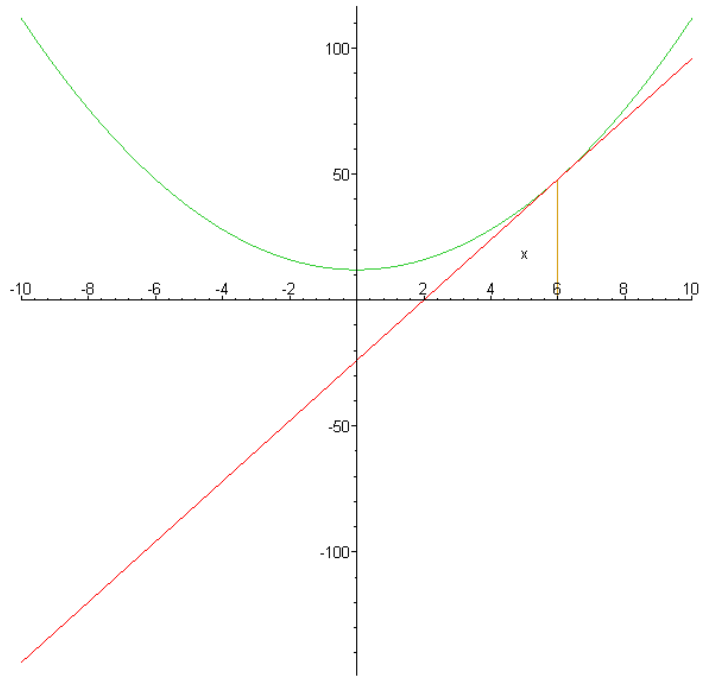
17-Calcule a derivada décima sexta de cos(x).

18-Calcule a derivada oitava de tg(x).

6.3 Reta tangente

Exemplos:

>with(student):
>showtangent(x^2+12,x=6);



>with(plots):
>g:=x->-x^2+5*x;

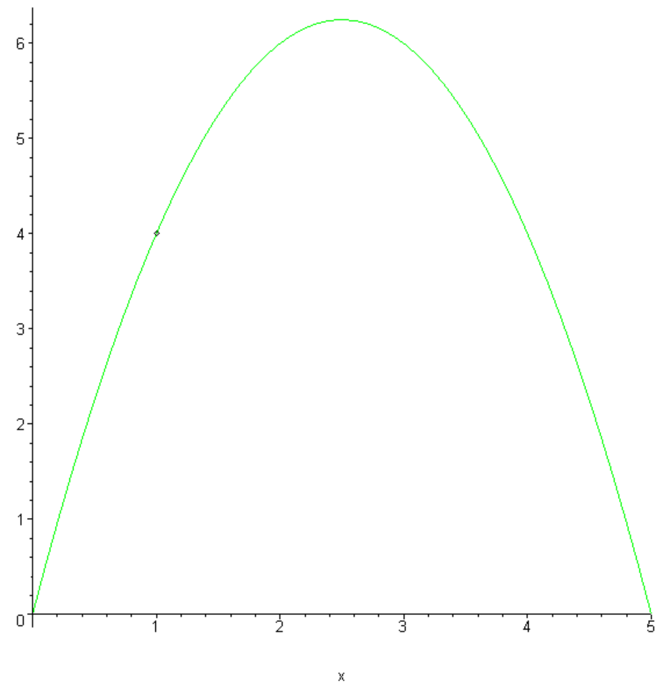
$$g := x \rightarrow -x^2 + 5x$$

>a := plot(g(x), x=0..5, color = green):
>p := [[1, g(1)]];

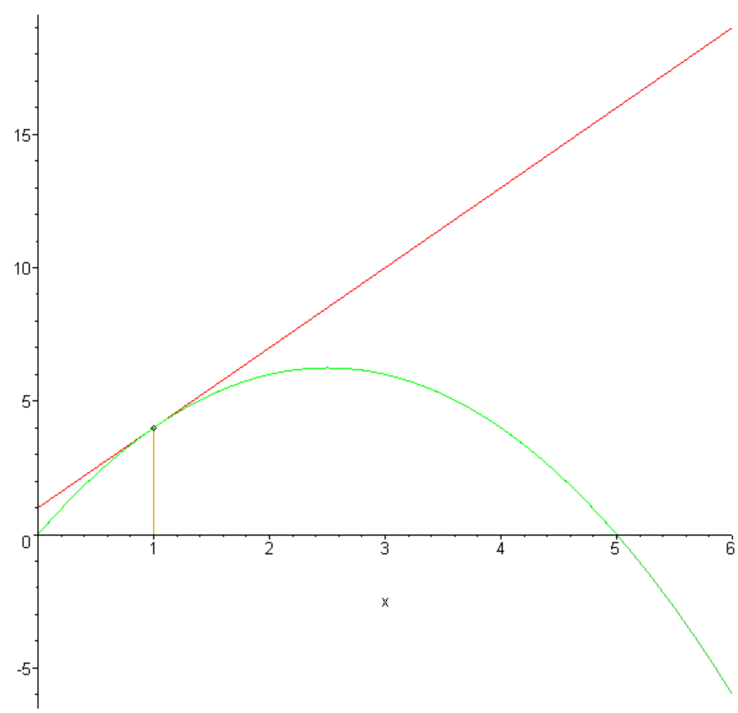
$$p := [[1, 4]]$$

>b := plot(p, x=0..5, style=point, symbol=diamond, color=black):

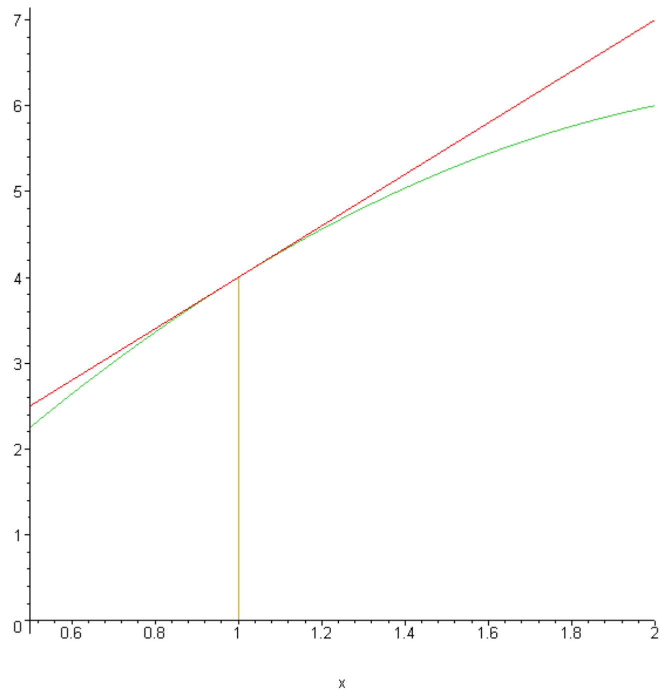
```
>display([a, b]);
```



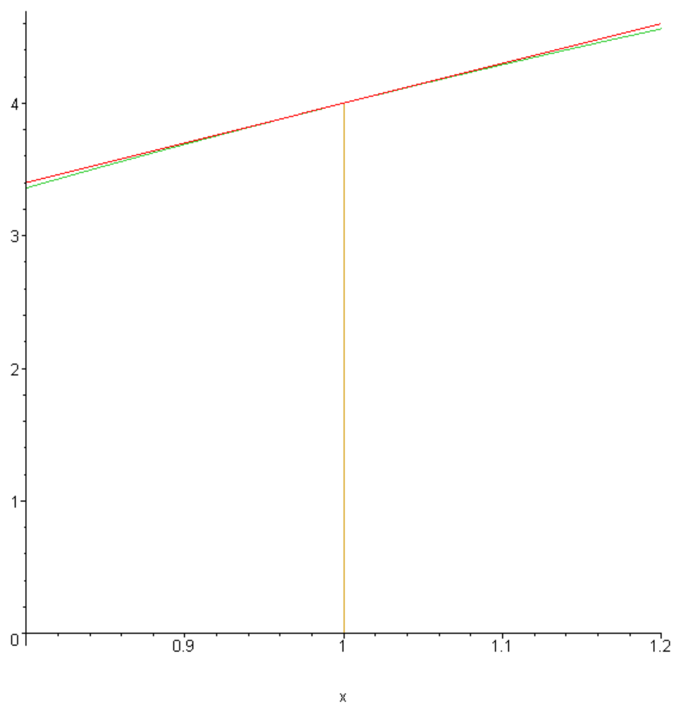

```
>with(student):
>c := showtangent(g(x),x=1, x=0..6):
> display( a, b, c);
```



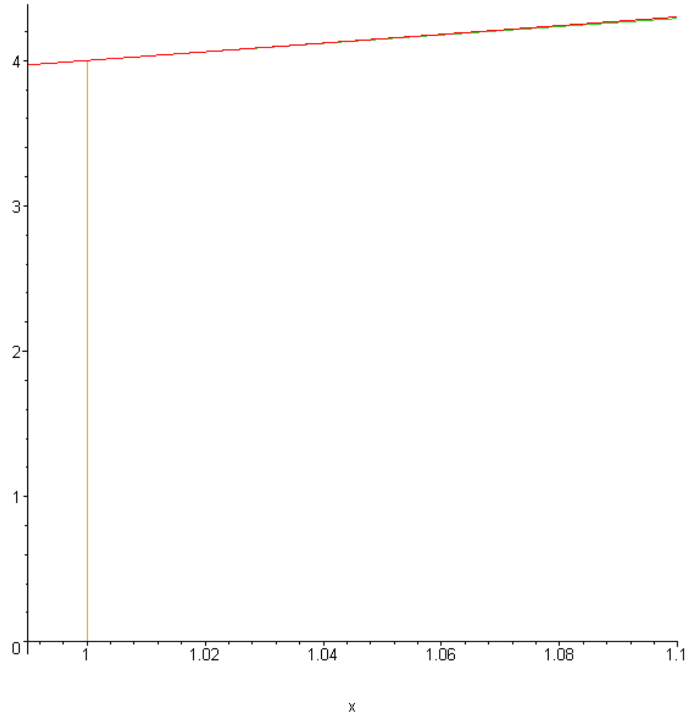
>**showtangent(g(x), x=1, x=0.5..2);**



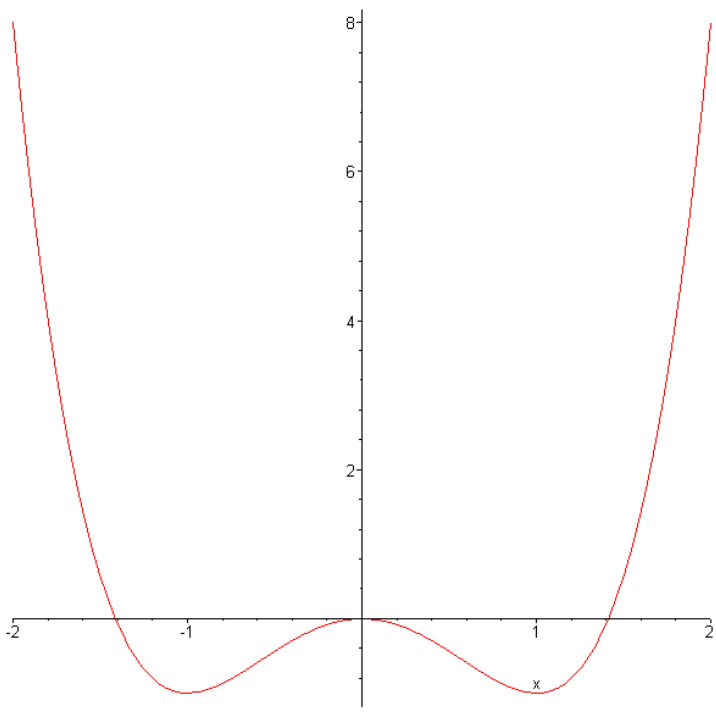
>**showtangent(g(x), x=1, x=0.8..1.2);**



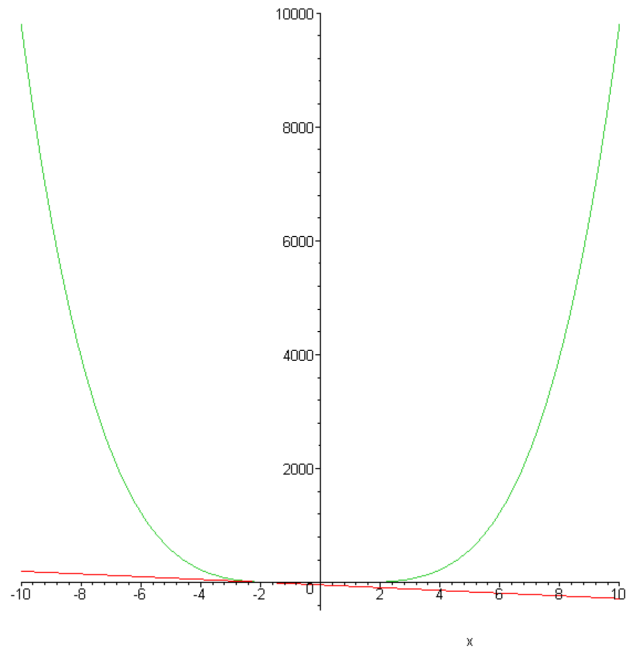
>**showtangent(g(x), x=1, x=0.99..1.1);**



>**with(plots):**
>**plot(x^4-2*x^2,x=-2..2);**



```
>with(student)
>showtangent(x^4-2*x^2,x=-2);
```



7. INTEGRAIS

O Maple possui diversos recursos para o cálculo de integrais indefinidas, definidas e impróprias.

7.1 Integrais de funções de uma variável

A integral (primitiva) de uma função definida por uma expressão algébrica ***f(x)*** é calculada com o comando ***int(f(x),x)***. Esse comando também possui uma forma inercial: ***Int(f(x),x)***. A forma inercial não efetua cálculos, apenas mostra a integral no formato usual o que, em determinadas situações, pode ser bastante útil.

Exemplos:

>**int(2*x,x);**

$$x^2$$

>**int(2*x*y,x);**

$$2\,X\,y\,x$$

>**int(2*x*y,y);**

$$x\,y^2$$

Exercícios

19-Calcule a integral da função f(x)= (x-8)/(x^3+2).

7.2 Integrais definidas e impróprias

Uma integral definida em um intervalo ***[a,b]*** é calculada com um comando do tipo ***int (f(x),x=a..b)***. Integrais impróprias são fornecidas como integrais definidas. Nesses casos, podemos ter ***a*** ou ***b*** iguais a $+\infty$ ou a $-\infty$.

Exemplos:

```
>restart;
>Int(x/(x^2+16),x=a..0);
```

$$\int_{a}^{0} \frac{x}{x^2 + 16}\, dx$$

```
>int(x/(x^2+16),x=a..0);
```

$$-\frac{1}{2}\ln(a^2 + 16) + 2\ln(2)$$

```
>Int(exp(-2*t)*t^2*ln(t),t=-infinity..0);
```

$$\int_{-\infty}^{0} \mathbf{e}^{(-2\,t)}\, t^2 \ln(t)\, dt$$

```
>int(exp(-2*t)*t^2*ln(t),t=-infinity..0);
```

$$\infty$$

Exercícios

20-Calcule a integral indefinida g(y)=y*lny, e em seguida calcule a integral definida da função g(y) no intervalo (0,3).

7.3 Integrais duplas e triplas

Podemos calcular uma integral dupla da seguinte forma **Int (Int (f(x,y), x=a..b), y=c..d).**

Exemplo:

```
>(Int(Int(2*x,x=-2..5),x=0..6));
```

$$2\int_{0}^{6}\int_{-2}^{5} x\, dx\, dx$$

```
>int(int(2*x,x=-2..5),x=0..6);
```

$$126$$

Porém, é mais cômodo utilizar o pacote ***student***, que possui dois comandos na forma inercial, que são úteis nos cálculos de integrais múltiplas iteradas. O comando ***value*** aplicado a essas formas inerciais permite calcular seus valores.
A forma inercial da integral dupla de uma função de duas variáveis, definida por uma expressão algébrica **f(x,y)** nas variáveis **x, y, z** , no Maple, corresponde ao comando: **Doubleint (f(x,y), x=a..b, y=c..d)**, onde **a..b** e **c..d** denotam a variação do **x** e do **y**, respectivamente.

```
>Doubleint(x^2+2*y,x=y..3*y,y=1..2):%=value(%);
```

$$\int_{1}^{2}\int_{y}^{3y} x^2 + 2y \, dx \, dy = \frac{251}{6}$$

Analogamente, a forma inercial da integral tripla de uma função de três variáveis, definida por uma expressão algébrica **f(x,y,z)** nas variáveis **x, y** , é dada por: **Tripleint (f(x,y,z), x=a..b, y=c..d, z=e..f)**, onde **a..b**, **c..d** e **e..f** denotam a variação do **x, y** e do **z,** respectivamente. **Tripleint** é equivalente a três comandos **Int** encaixados: **Int (Int (Int (f(x,y,z), x=a..b), y=c..d), z=e..f).**

```
>Tripleint(x*y*z,x,y,z):%=value(%);
```

$$\int\int\int x\,y\,z \, dx \, dy \, dz = \frac{x^2\,y^2\,z^2}{8}$$

```
>Tripleint(x*y*z, z=0..sqrt(4-y^2),y=0..2*x, x=0..3):%=value(%);
```

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{2x}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} x\,y\,z \, dz \, dy \, dx = -162$$

Exercícios

21-Calcule as seguintes integrais triplas:

a) $\int_{0}^{3}\int_{0}^{2x}\int_{0}^{y} x + y + \ln(z) \, dz \, dy \, dx$

b) $\int_{0}^{3}\int_{0}^{\ln(2\pi x)}\int_{0}^{y} x\,y\,z \, dz \, dy \, dx$

8. SEQUÊNCIAS

No Maple calcula-se sequencias da seguinte forma:

```
>a:= [ seq((-1)^i, i=1..10) ];
```

$$a := [-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]$$

```
>b:= [ seq(((i^2)+1)/(i+1), i=1..15) ];
```

$$b := \left[1, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{17}{5}, \frac{13}{3}, \frac{37}{7}, \frac{25}{4}, \frac{65}{9}, \frac{41}{5}, \frac{101}{11}, \frac{61}{6}, \frac{145}{13}, \frac{85}{7}, \frac{197}{15}, \frac{113}{8}\right]$$

```
>c:= [ seq((i+1)/((i^2)+1), i=1..20) ];
```

$$c := \left[1, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{5}{17}, \frac{3}{13}, \frac{7}{37}, \frac{4}{25}, \frac{9}{65}, \frac{5}{41}, \frac{11}{101}, \frac{6}{61}, \frac{13}{145}, \frac{7}{85}, \frac{15}{197}, \frac{8}{113}, \frac{17}{257}, \frac{9}{145}, \frac{19}{325}, \frac{10}{181}, \frac{21}{401}\right]$$

9. SOMATÓRIO

Um somatório pode ser calculado pelo Maple com um comando ***sum(f(n),n=a..b)***, na qual ***f(n)*** é o termo geral do somatório dependendo de um número inteiro ***n***, e ***n=a..b*** é o intervalo de variação do ***n*** significando que ***a < n < b.*** A forma inercial desse comando é ***Sum(f(n),n=a..b).***

```
>Sum(2*x^n/(n+1)!,n=0..15)=sum(2*x^n/(n+1)!,n=0..15);
```

$$\sum_{n=0}^{15}\left(\frac{2x^n}{(n+1)!}\right)=2+x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{60}x^4+\frac{1}{360}x^5+\frac{1}{2520}x^6+\frac{1}{20160}x^7+\frac{1}{181440}x^8+\frac{1}{1814400}x^9+\frac{1}{19958400}x^{10}+\frac{1}{239500800}x^{11}+\frac{1}{3113510400}x^{12}+\frac{1}{43589145600}x^{13}+\frac{1}{653837184000}x^{14}+\frac{1}{10461394944000}x^{15}$$

```
>Sum((3/5)^(n+1),n=0..infinity)=sum((3/5)^(n+1),n=0..infinity);
```

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{(n+1)}=\frac{3}{2}$$

Exercícios

22- Calcule o somatório de (k+1)/ k^4, k variando de 1 até 48..

23- Calcule o somatório de (-1)^n / (3*n+7), n variando de 2 até infinito.

24-Calcule o somatório de 1/ k^9, k variando de 1 até 15.

10. PRODUTÓRIO

O cálculo de produtórios é feito com o comando ***product,*** que possui a forma inercial ***Product***.

Exemplos:

```
>Product(a[n],n=0..10)=product(a[n],n=0..10);
```

$$\prod_{n=0}^{10} a_n = a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9\, a_{10}$$

```
>Product(1-(1/n^2),n=1..infinity)=product(1-(1/n^2),n=1..infinity);
```

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=0$$

Exercícios

25-Calcule o prudutório de 3^n**,** n variando de 0 até 100.

11. MATRIZ

Para trabalharmos com matrizes devemos, primeiramente carregar o pacote ***LinearAlgebra***:

>with(LinearAlgebra):

11.1 Definindo uma Matriz

Para definirmos uma matriz usamos o comando **Matrix.**

Exemplo:

>**A:=Matrix([[2,8],[6,1]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

>**G:=Matrix([[1,2],[3,4]]);**

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Além deste, outro comando pode ser usado para expressar matrizes:

>**C:=<<3,2,5>|<6,1,7>>;**

$$C := \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Caso a matriz tenha uma lei de formação, procedemos da seguinte maneira:

>**Matrix(5,8,(i,j)->i/j);**

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7} & \frac{1}{4} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{7} & \frac{3}{8} \\ 4 & 2 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{4}{5} & \frac{2}{3} & \frac{4}{7} & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & 1 & \frac{5}{6} & \frac{5}{7} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

11.2Operações algébricas com matrizes

Definidas as matrizes podemos realizar as operações algébricas:

- Soma de matrizes: ***A + B***;
- Produto de matrizes: ***A . B***;
- Multiplicação por Escalar: ***n*A***;
- Potenciação: ***A^n***;
- Potenciação por um número negativo: ***inv_A:=A^(-1)***; A potenciação por um número negativo quer dizer a inversão da matriz, e subsequente a potenciação pelo módulo do número.
- Traço: ***Trace(A)***;
- Matriz Transposta: ***Transpose(A)***;
- Posto: ***Rank(A)***;

Exemplos:

>**A+G;**

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

>**C.A;**

$$\begin{bmatrix} 42 & 30 \\ 10 & 17 \\ 52 & 47 \end{bmatrix}$$

>3*A;

$$\begin{bmatrix} 6 & 24 \\ 18 & 3 \end{bmatrix}$$

>A^5;

$$\begin{bmatrix} 20816 & 27512 \\ 20634 & 17377 \end{bmatrix}$$

>inv_G:=G^(-1);

$$inv\_G := \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

>inv_G.G;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

>Transpose(C);

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

>Trace(A);

$$3$$

Podemos modificar um elemento da matriz da seguinte forma:

>G[2,2]:=beta;

$$G_{2,\,2} := \beta$$

>G;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \beta \end{bmatrix}$$

11.3 Matrizes Especiais

Existem várias matrizes especiais que são usadas com freqüência em Álgebra Linear. Muitas delas têm comandos específicos para gerá-las. A seguir alguns exemplos dessas matrizes especiais:

Exemplos:

>DiagonalMatrix([7,13,21]);

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

>IdentityMatrix(8);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

>ZeroMatrix(3);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11.4 Sistemas Lineares

Abrindo o pacote ***linalg*** podemos resolver sistemas lineares:

>with(linalg):

Considere o seguinte sistema:

3x+2y-z=1
x-y=3
y+z=5

A partir desse sistema definimos A como a matriz dos coeficientes das incógnitas **x, y** e **z** e *B* como sendo a matriz dos termos constantes.

```
> A:=matrix([[3,2,-1],[1,-1,0],[0,1,1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix([[1],[3],[5]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Definidas as matrizes, usamos o comando ***linsolve(A,B):***

```
>linsolve(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

Exercícios

26-Defina as matrizes

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} B := \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} C := \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

e desenvolva as operações de soma, multiplicação, multiplicação por escalar, encontre a inversa de A, substitua $\mathbf{a_{12}}$ por α(alpha).

27-Resolva o seguinte sistema:

5x+3y-4z=1

2x-8y-z=2

z=1

BIBLIOGRAFIA

ANDRADE, L. N.; **Introdução à computação algébrica com o Maple**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

PORTUGAL, R.; **Introdução ao Maple**. Petrópolis - RJ, 2002.