



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PET MATEMÁTICA



# *Geometria Plana e Espacial*

## *com o WinGeom*

Antonio Carlos Lyrio Bidel  
Daiane Medianeira Ilha da Silva  
Débora Dalmolin  
Lauren Maria Mezzomo Bonaldo

**Santa Maria, maio de 2011**

# Sumário

Apresentação .....	3
Introdução .....	4
Janela 2 – dim.....	5
1.1 Construindo Pontos.....	6
1.1 Construindo Segmentos e Retas .....	7
1.2 Circunferências.....	11
1.3 Unidades.....	13
2. Menus Auxiliares 2-dim.....	20
2.1 Transferência.....	20
2.3 Editar .....	23
2.4 Botões.....	25
2.5 Ver .....	27
3. PROBLEMAS 2 – dim.....	29
4. JANELA 3 – dim.....	35
4.1 Pontos.....	35
4.2 Linear.....	36
4.3 Curvo .....	37
4.4 Unidades.....	40
5. Menus Auxiliares 3-dim.....	43
5.1 Editar .....	43
5.2 Botões.....	43
5.3 Ver .....	45
5.4 Outros.....	46
6. PROBLEMAS 3 – dim.....	49
Referências Bibliográficas .....	51

## ***Apresentação***

Esta apostila é resultado de um trabalho de ensino do PET Matemática – Programa de Educação Tutorial – que busca propiciar aos estudantes participantes condições para a realização de atividades acadêmicas extracurriculares no âmbito da pesquisa, do ensino e da extensão.

Este minicurso foi desenvolvido pelos integrantes do Grupo PET Matemática como uma proposta de qualificar a formação dos petianos e a comunidade acadêmica na utilização de novas tecnologias aplicadas ao ensino.

Nesta apostila são apresentadas várias possibilidades de usar o Wingeom no ensino-aprendizagem de geometria. Além de apresentar alguns de seus recursos básicos nos espaços bidimensionais e tridimensionais, são listadas algumas tabelas que sintetizam os principais comandos e opções dos menus do Wingeom, tais como criar, editar, realçar, e medir figuras geométricas.

# Introdução

O Wingeom é um software livre que permite construções geométricas em duas ou três dimensões e por meio de animação, possibilita a verificação de diversas propriedades geométricas. Além disso, ele é um programa de fácil utilização, cada menu do Wingeom tem seu próprio arquivo de ajuda.

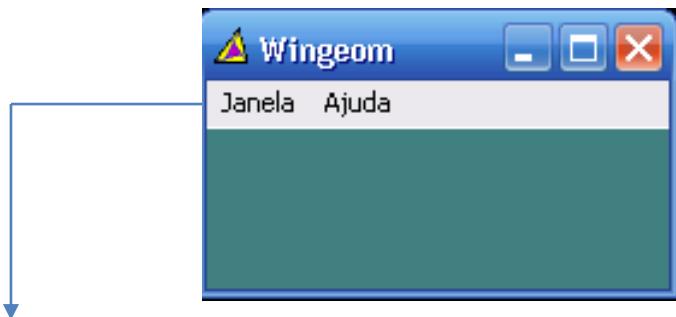
O desenvolvedor deste software é o Professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy, que o atualiza constantemente incluindo novas ferramentas e outras possibilidades de construções. O Wingeom é distribuído em 10 idiomas, incluindo o Português do Brasil, sendo que esta versão foi desenvolvida com o apoio de Franciele Cristine Mielke.

O WinGeom é um software que visa favorecer os processos educacionais em Matemática, pois algumas de suas aplicações motivam o ensino-aprendizagem de geometria. Sendo assim o nosso objetivo é explorar alguns resultados de Geometria Plana, Espacial e Analítica, as quais são fortemente caracterizadas pelo aspecto visual.

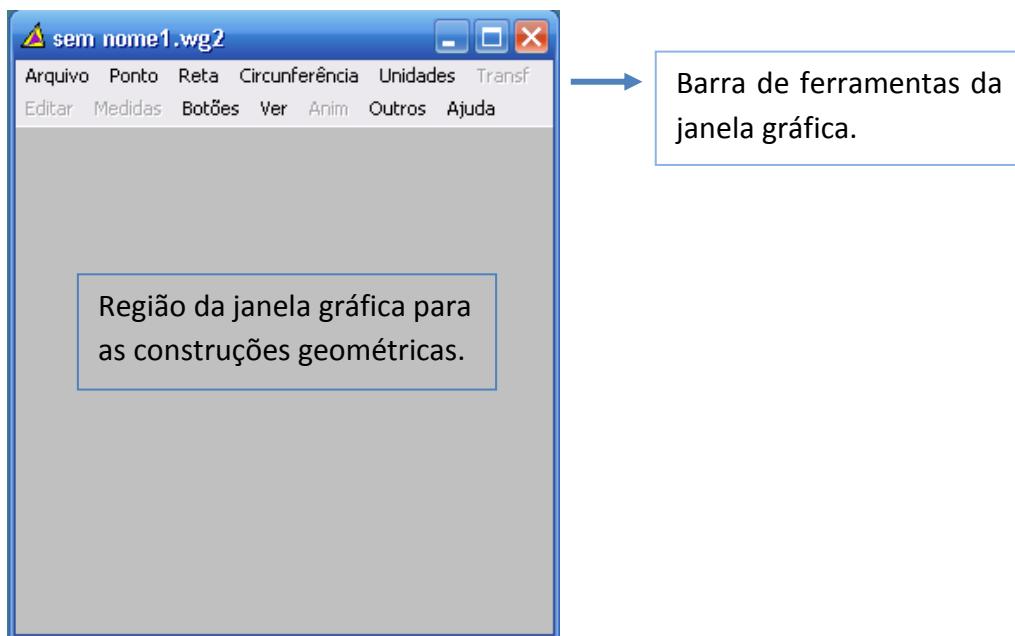
Para fazer o download do software Wingeom e da apostila, acesse a página do grupo Pet Matemática da UFSM <http://w3.ufsm.br/petmatematica/>.

## Janela 2 – dim

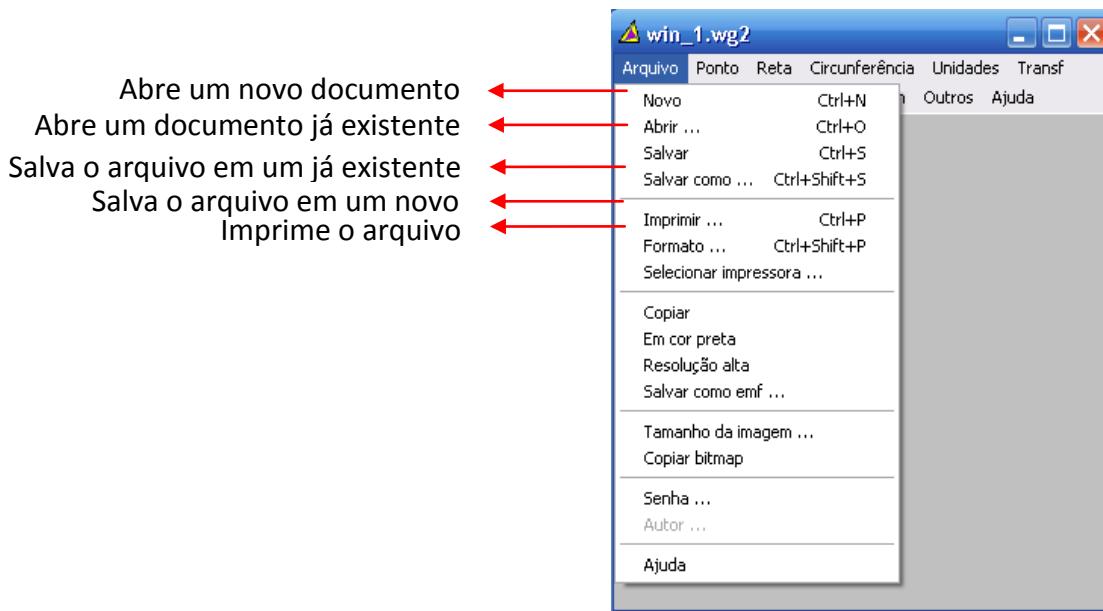
Após abrir o Wingeon temos a seguinte janela gráfica:



No menu ‘**Janela**’, na barra de ferramentas, clique no item ‘2-dim’ para construções planas, ou no item ‘3-dim’ para construções espaciais. Trabalharemos com construções de figuras geométricas planas contidas no item **Janela→2-dim**, usando a barra de ferramentas desta janela. Itens em negrito na barra de ferramentas significam que são os itens que podem ser clicados com o mouse. Atalhos no teclado, como Enter, Esc e Ctrl + W são escritos geralmente à direita do item no menu escolhido.



Clicando em ‘Arquivo’ temos as seguintes opções:

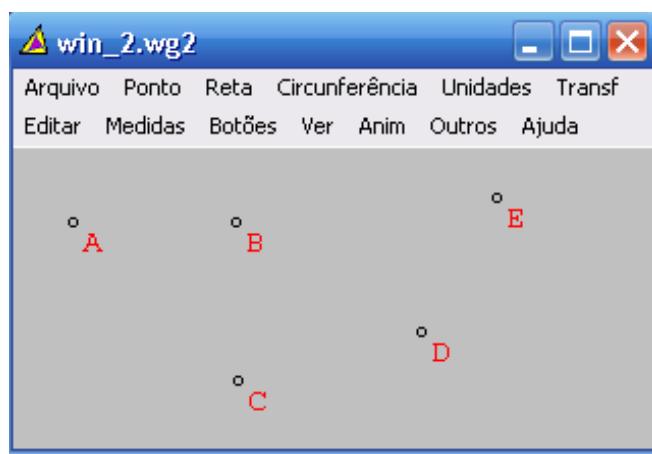


O primeiro passo é salvar o arquivo. Clique em salvar como e escolha a pasta de origem do documento.

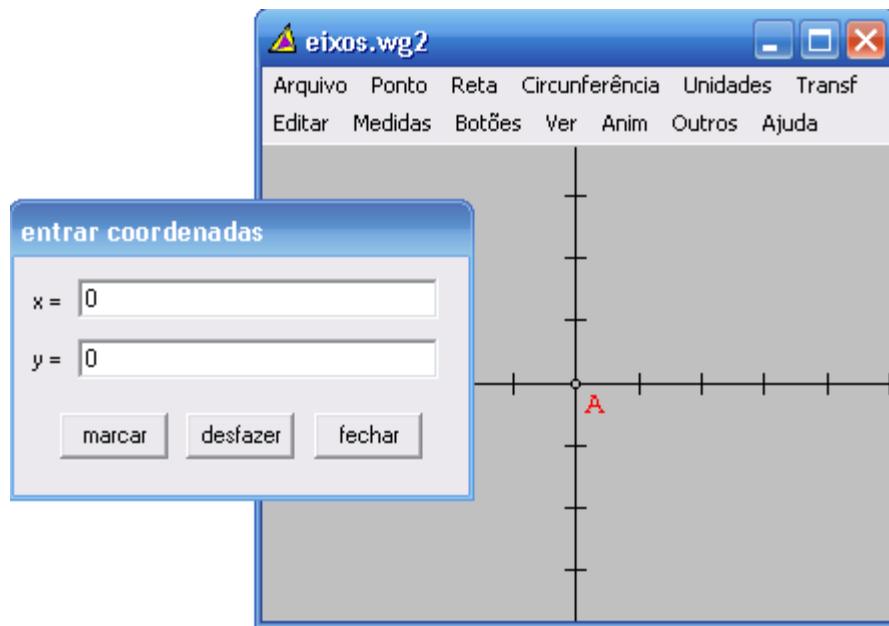
### 1.1 Construindo Pontos

Para marcar um ponto existem duas possibilidades, uma marcando pontos aleatórios e outra no sistema de coordenadas cartesianas:

1) Leve o cursor até a região da janela gráfica e clique com o botão direito do mouse.



2) Na barra de ferramentas clique em “Ponto” e selecione a opção “Coordenadas”, abrirá uma janela, na qual pode-se inserir as coordenadas (x,y) desejadas, em seguida clique em “marcar”.



Os pontos aparecem marcados com letra maiúscula e em ordem alfabética.

**OBS:** Uma vez inseridos os eixos cartesianos, pode-se removê-los clicando na opção **Ver** e depois selecionando **Eixos** e novamente **Eixos**. Ou então, apenas com o comando **Ctrl+A**. Ainda que os eixos estejam ocultos, o software continua usando-os como referência.

**EXERCÍCIO:** Utilizando coordenadas construa os seguintes pontos no Wingeom:

- |                 |                |
|-----------------|----------------|
| a) A = (2,2)    | d) B = (1,1)   |
| b) C = (0,0)    | e) D = (-1,-1) |
| c) E = (-2,1.5) | f) F = (3,-2)  |

## 1.2 Construindo Segmentos e Retas

Para construir segmentos de reta, semi-retas ou retas é necessário que tenhamos no mínimo dois pontos distintos construídos. Utilizando os pontos do exercício anterior vamos construir os segmentos de retas BE e AF, para isso siga os seguintes passos:

- 1) Clique em **retas** e escolha a opção **segmento**;
- 2) Digite **BE, AF**;

Vamos agora construir as retas BE e AF. Basta selecionar as opções **reta** e depois **retas**. Digite: **BE, AF**.

**OBS:** A ordem das letras BE ou EB não interfere, bem como também não interfere se digitarmos AF, BE. Também é possível construir um segmento, com a seta do mouse sobre o ponto A, segure o botão esquerdo do mouse e arraste até o ponto B, soltando então o botão do mouse. A semi-seta AB aparecerá na tela.

Observe que essas duas retas construídas interceptam-se em um ponto. Para marcar esse ponto devemos realizar o seguinte procedimento: **Ponto→Interseção→Reta-retas**. Assim, será construído o ponto G.

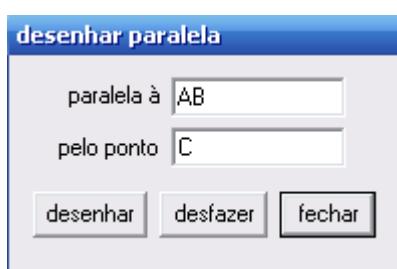
*Observações:*

- 1) Para verificarmos quais são as coordenadas de um ponto qualquer anteriormente construído, basta clicar duas vezes com o botão direito do mouse exatamente sobre o ponto desejado. Esta operação é possível apenas com pontos para os quais foram fornecidas as suas coordenadas, para o ponto G do exercício anterior, por exemplo, esse mecanismo não funcionará.
- 2) Para desfazer a construção imediatamente anterior é preciso apenas o comando **Ctrl+Z**, e para refazer uma construção desfeita ação o comando **Ctrl+Y**.
- 3) Para *apagar pontos ou segmentos* clique em **Editar** na barra de ferramentas, selecione **Apagar**.

#### 1.1.1 Retas Paralelas

*Axioma:* Por um ponto não pertencente a uma reta r passa uma única reta paralela à r.

Para construirmos duas retas paralelas precisamos de uma reta inicial dada **AB** e um ponto **C** não pertencente a essa reta. A partir disso, acessar a opção **reta→paralelas**. Quando aparecerá a seguinte janela:



*Exercício:*

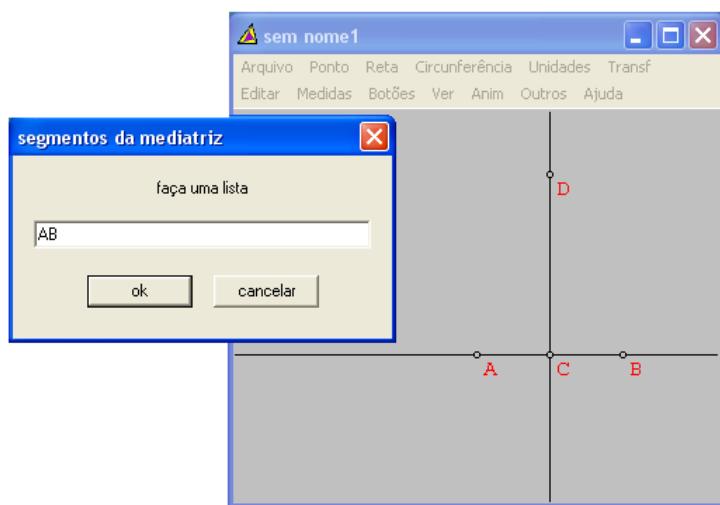
Com base nas informações anteriores, construa sem utilizar coordenadas cartesianas, um paralelogramo qualquer.

### 1.1.2 Retas Perpendiculares

Dada uma reta qualquer, temos três tipos de construção de retas perpendiculares a essa reta:

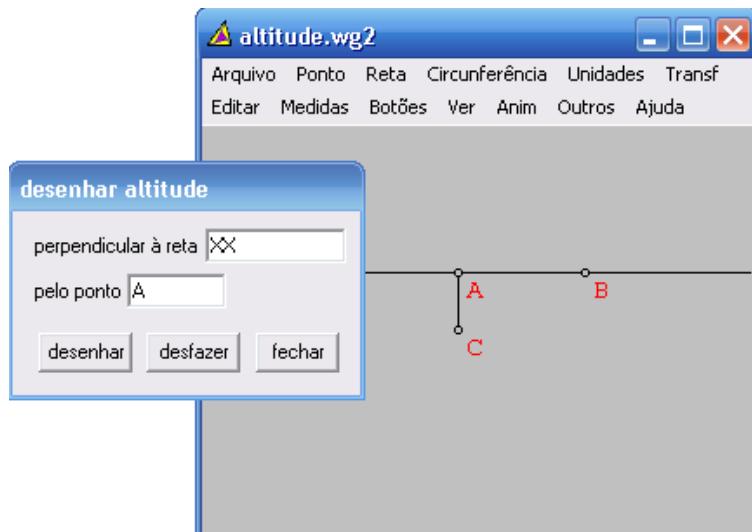
#### MEDIATRIZ

Dada uma reta  $AB$  qualquer, para traçarmos a reta perpendicular a ela passando pelo seu ponto médio, são necessários os seguintes comandos: **reta→perpendiculares→mediatriz**. Quando a janela abaixo deverá ser preenchida:



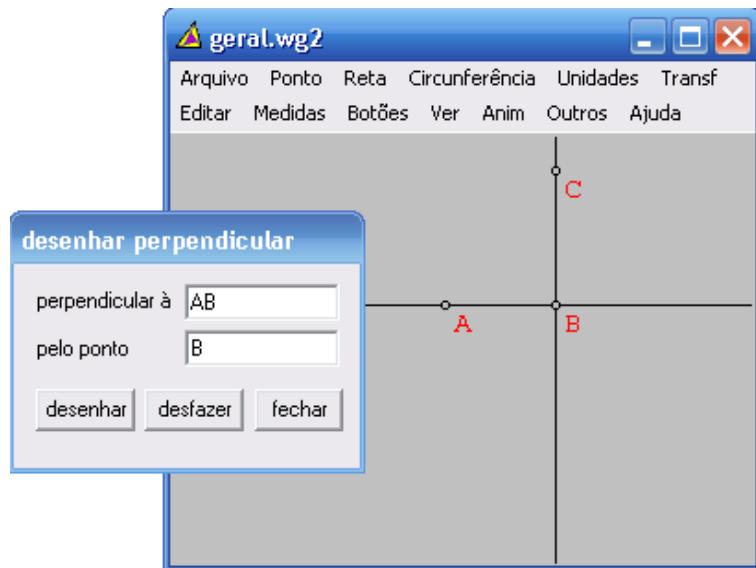
#### ALTITUDE

Neste caso, além da reta dada, também é preciso um ponto  $C$  qualquer não-colinear a  $A$  e  $B$ . Para isso, siga os passos: **reta→perpendiculares→altura**.

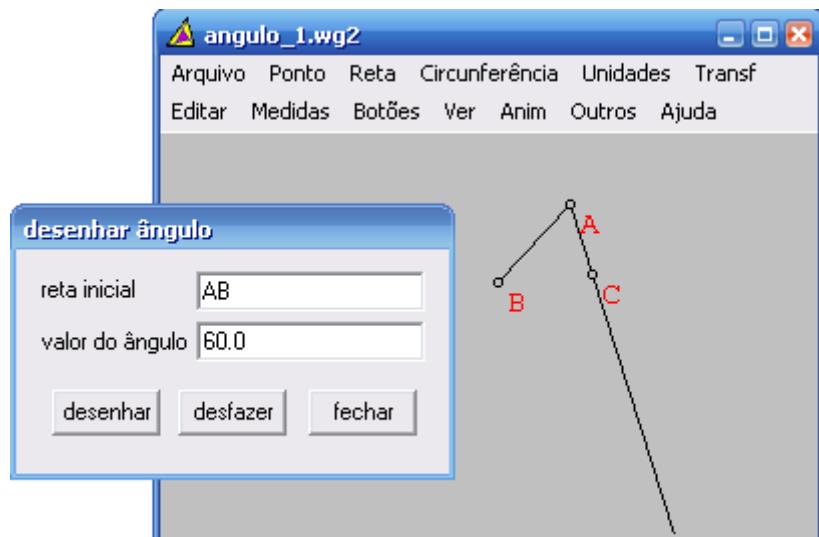


**GERAL**

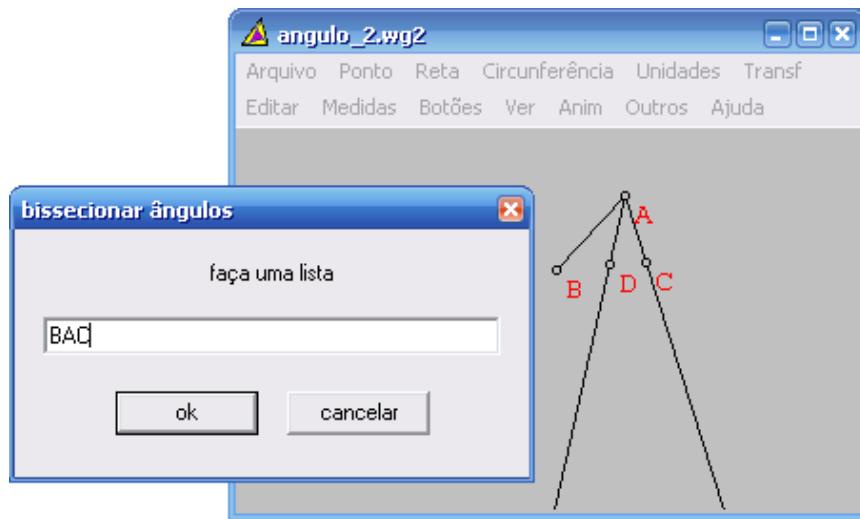
Traçar uma reta perpendicular a uma reta qualquer AB passando por um ponto distinto C: **reta→perpendiculares→geral**.

**1.1.3 Ângulos**

Após ter traçado um segmento de reta, podemos construir e bissecionar ângulos. Para construirmos ângulos com o software Wingeon devemos clicar em **Retas→ângulos→Novos ângulos**. Assim como mostra a figura:



Da mesma forma podemos bissecionar ângulos já existentes clicando em **Retas→ângulos→Bissecionar existentes**.



## 1.2 Circunferências

Para construirmos circunferências existem dois modos principais, porém é necessário ter-se ao menos um ponto previamente construído. Por isso, construa os seguintes pontos:

$$A=(2,2)$$

$$B=(-1,-1)$$

$$C=(0,0)$$

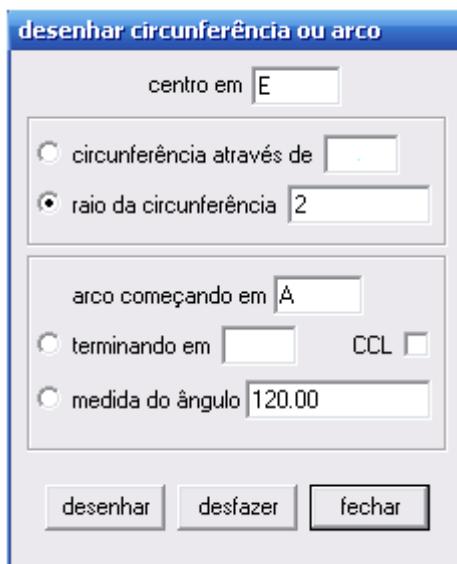
$$D=(3,-2.5)$$

$$E=(-4,6)$$

$$F=(-5,-6.5)$$

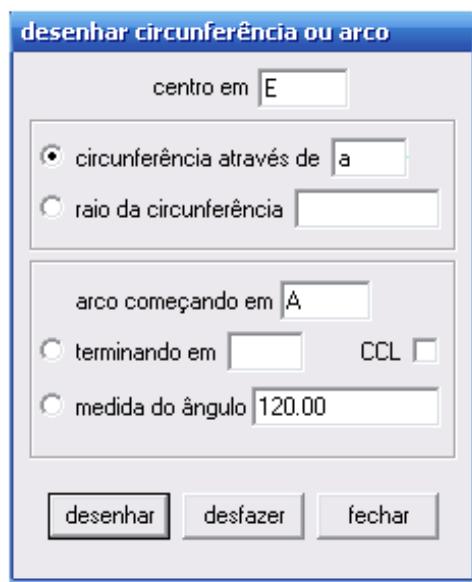
*CIRCUNFERÊNCIA→RAIO-CENTRO*

Centro em **E**, raio da circunferência **2**, **desenhar**, como na tabela abaixo:

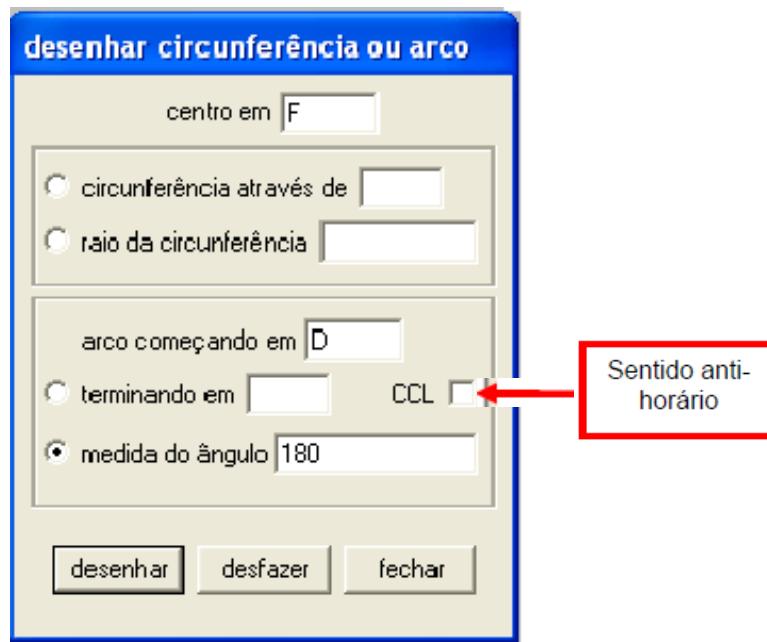


**CIRCUNFERÊNCIA→RAIO-CENTRO**

Centro em **E**, circunferência através de **A**, **desenhar**, como na tabela abaixo:

**CIRCUNFERÊNCIA→RAIO-CENTRO**

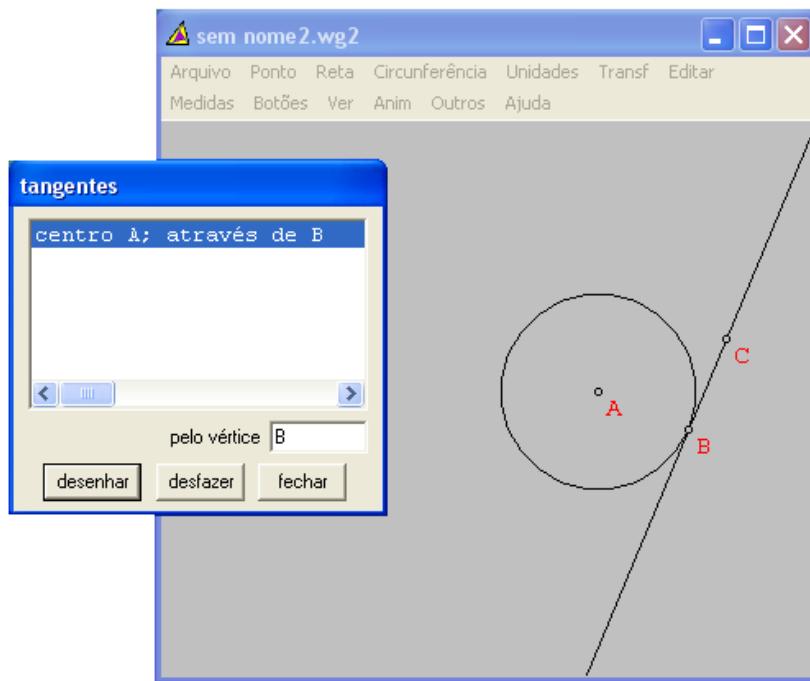
Para desenhar um arco, com centro **F** e ângulo 180 graus, como na tabela abaixo:



Também é possível construir uma circunferência com 3 pontos não colineares, usando os comandos **Circunferência -> Circ circunscrita**.

### 1.2.1 Retas Tangentes a uma Circunferência

Para traçarmos retas tangentes a uma circunferência previamente construída, devemos seguir os seguintes passos: Na barra de ferramentas clique em **Retas→tangentes→ponto-circ...**



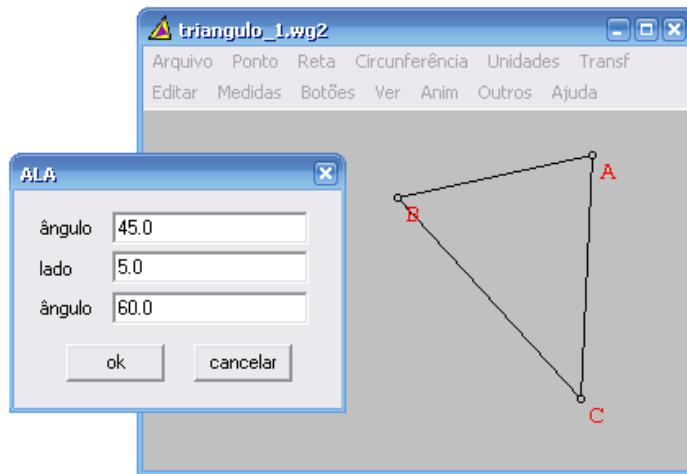
### 1.3 Unidades

#### 1.3.1 Triângulos

Existem quatro maneiras de construir triângulos no Wingeom. A primeira e mais simples se detém em marcar três pontos na janela de trabalho e posteriormente “ligá-los”. As outras três maneiras são específicas, elas levam em conta os valores dos segmentos e ângulos dos triângulos a serem construídos.

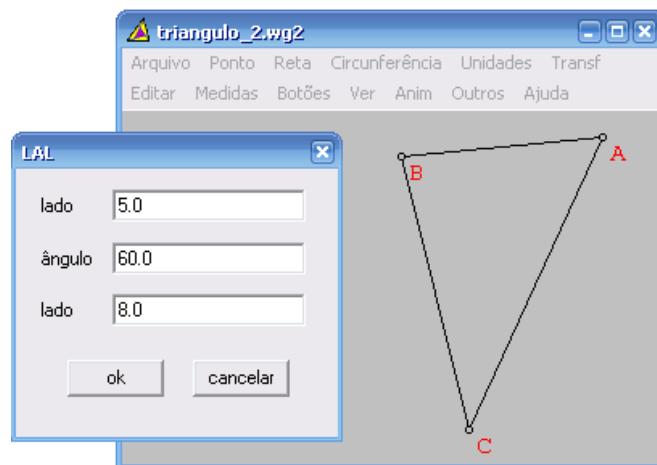
*ALA (ângulo, lado, ângulo)*

Para construir deste modo, deve-se estipular o valor de dois ângulos e um lado do triângulo.



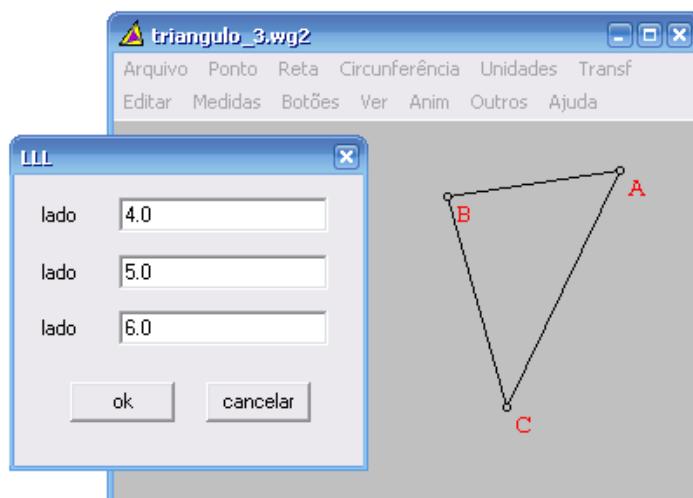
### LAL (lado, ângulo, lado)

Para construir deste modo, deve-se estipular o valor de dois lados e um ângulo do triângulo.



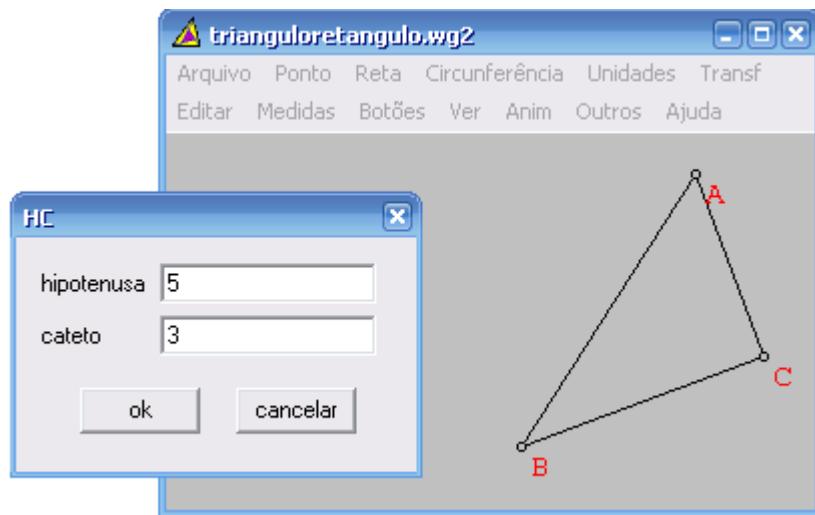
### LLL (lado, lado, lado)

Devemos informar o valor de três lados do triângulo.



## TRIÂNGULO RETÂNGULO

Devemos informar o valor da hipotenusa e de um dos catetos do triângulo.

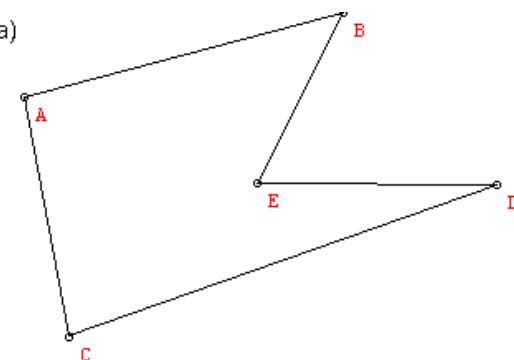


### 1.3.2 Polígonos

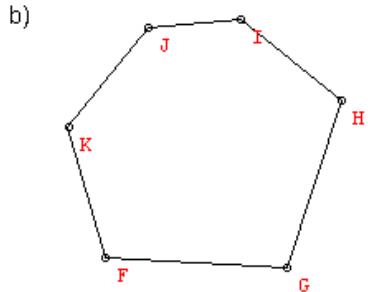
Para construir polígonos, clique em **Unidades**→**Polígonos**. Neste item temos as seguintes opções: **Regular**, **Paralelogramo**, **Trapézio Isósceles**, **Pipa** e **Estrelado**.

*Exercício:* Quais das figuras representam polígonos?

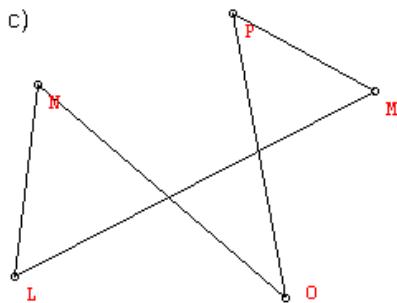
a)



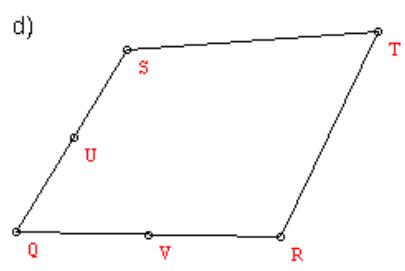
b)

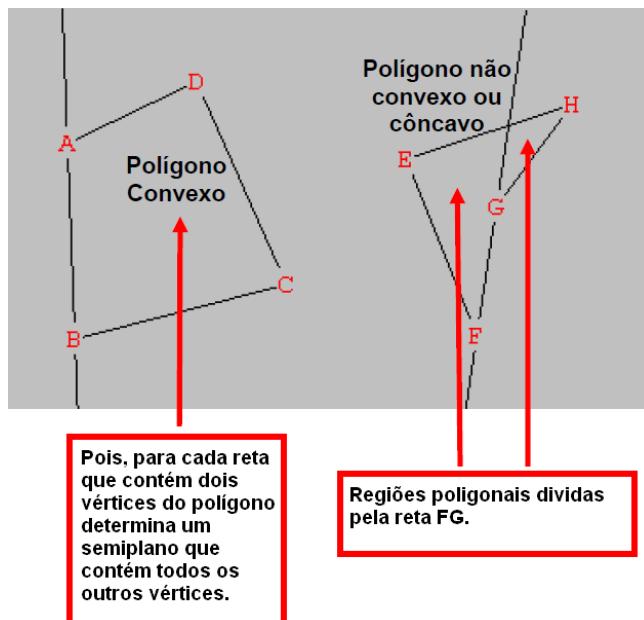


c)



d)





*OBS:* Diagonal de um polígono é um segmento que tem por extremidade dois de seus vértices que não pertencem a um mesmo lado.

$$(d = \frac{n.(n-3)}{2})$$

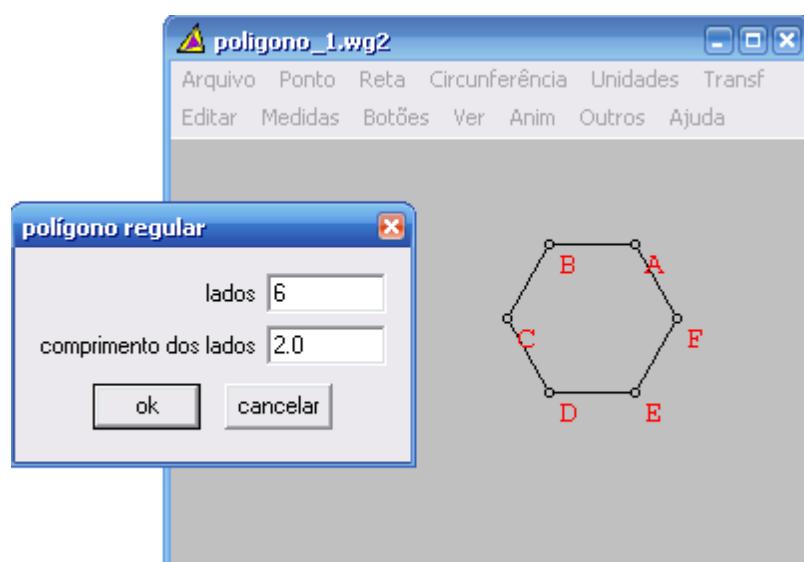
Onde  $n$  é o número de lados do polígono. *Mostre!*

*Qual é o polígono que possui 27 diagonais?*

### POLÍGONO REGULAR

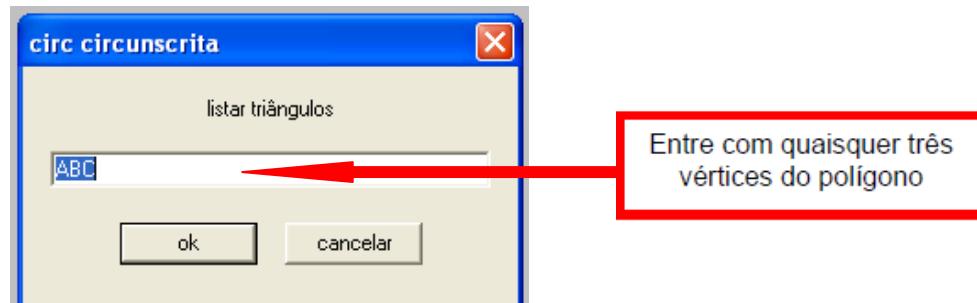
*Definição:* Um polígono regular é um polígono convexo, eqüilátero e equiângulo.

Neste item você pode escolher o número de lados e o comprimento de cada um desses lados do polígono que deseja criar.



### Construindo circunferências circunscritas e inscritas a um polígono regular

Para construir uma **circunferência circunscrita** a um polígono regular, vá à barra de ferramentas da janela **Circunferência -> Circ circunscrita**, abrirá a janela:

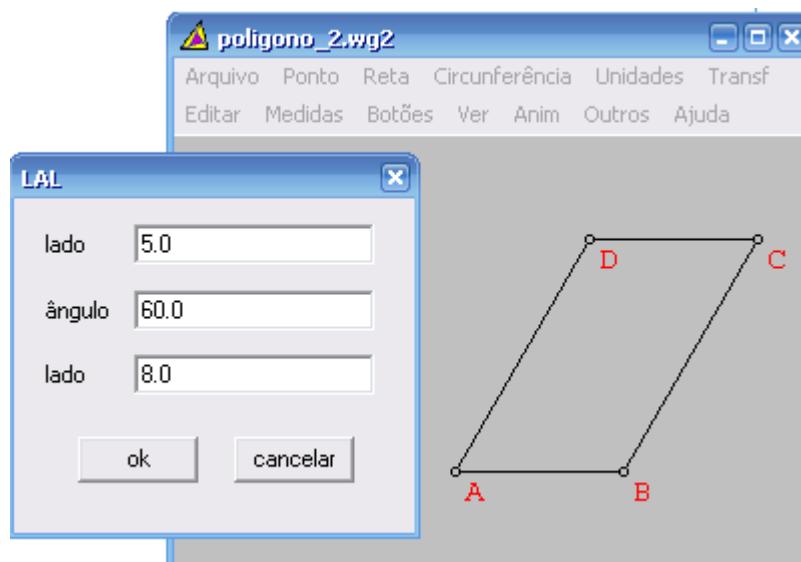


Para construir uma **circunferência inscrita** a um polígono regular, devemos marcar os pontos médios de todos os lados do polígono. E em seguida, construir a circunferência circunscrita ao polígono regular, obtido pelos pontos médios.

### PARALELOGRAMO

*Definição:* Paralelogramo é um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

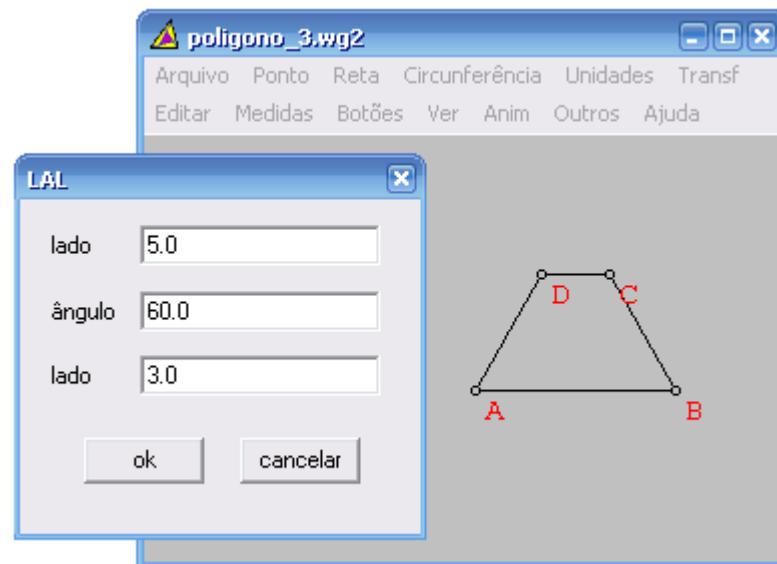
Neste item informa-se a medida desejada dos lados e do ângulo formado pelos mesmos.



## TRAPÉZIO ISÓSCELES

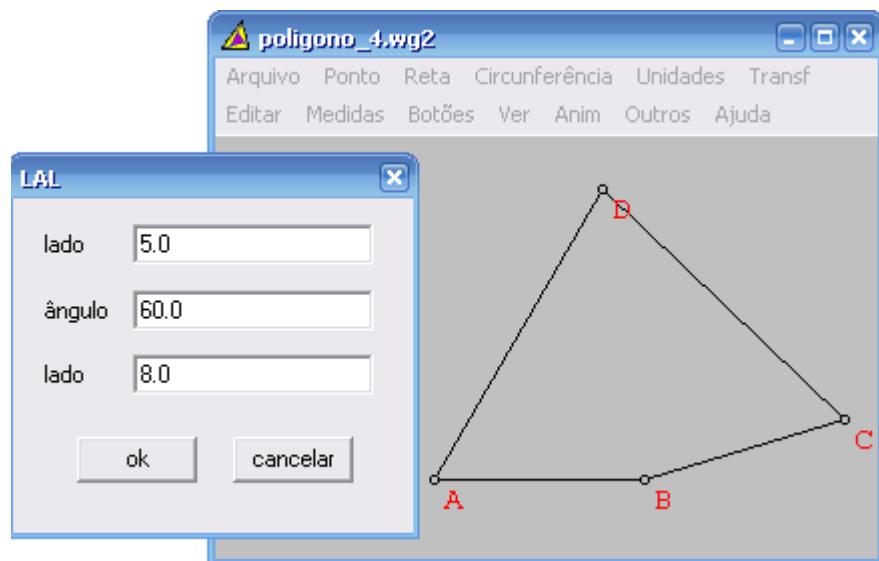
**Definição:** Trapézio isósceles é um quadrilátero em que somente dois lados são paralelos (as bases), e suas laterais (os outros lados) são congruentes.

Para construir este tipo de trapézio escolhemos a medida dos lados paralelos e dos ângulos congruentes da base.



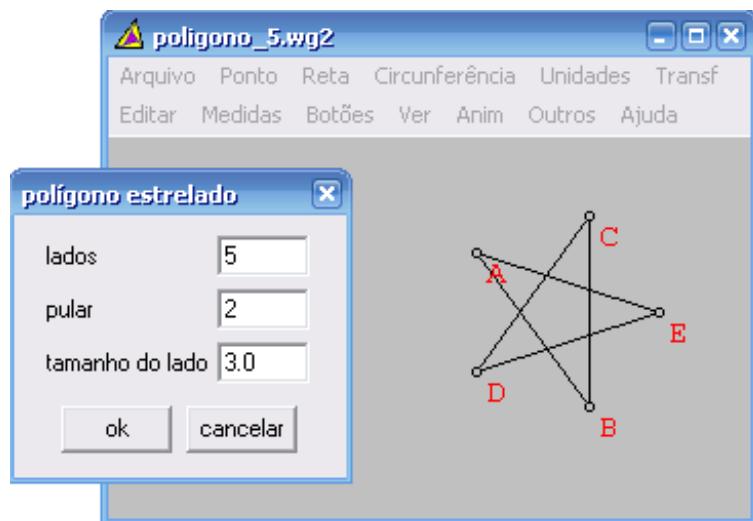
## PIPA

Neste item escolhemos as medidas do lado maior e do lado menor, e o ângulo formado por eles.



## ESTRELADO

Neste item devemos informar ao software os lados do polígono, o tamanho dos respectivos lados e o “pulo”.



Outros quadriláteros em **Unidades -> Aleatórios**

## RETÂNGULO

*Definição:* Retângulo é um quadrilátero que possui todos os seus ângulos retos.

Todo retângulo é um paralelogramo?

As diagonais de um retângulo são congruentes?

## LOSANGO

*Definição:* Losango é um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes.

Todo losango é um paralelogramo?

## QUADRADO

*Todo quadrado é um retângulo?*

*Todo quadrado é um losango?*

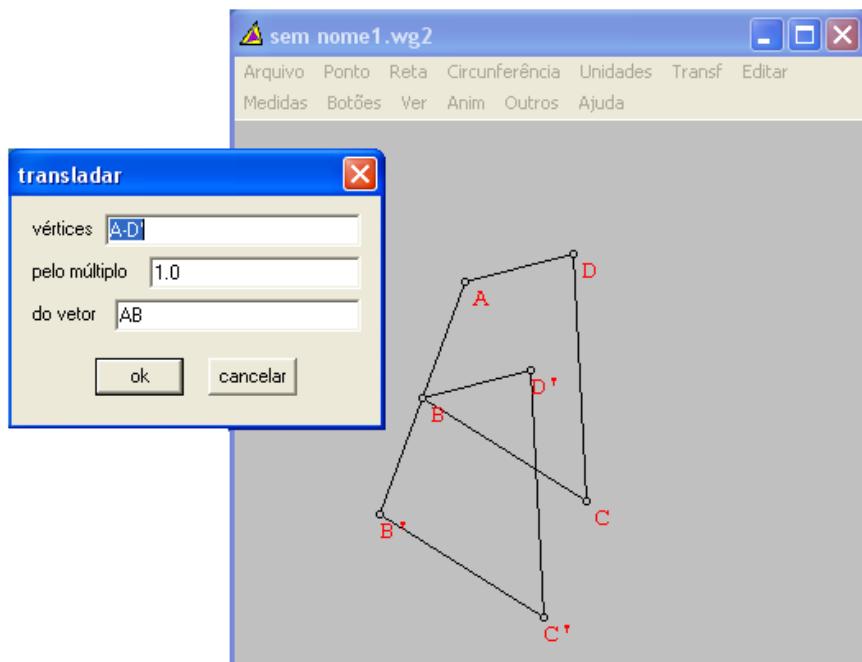
## 2. Menus Auxiliares 2-dim

### 2.1 Transferência

Neste item encontramos recursos auxiliares dos quais podemos dispor, como por exemplo: **Transladar**, **Rotacionar**, **Translação-reflexão**, **Espelho** e **Inverter**.

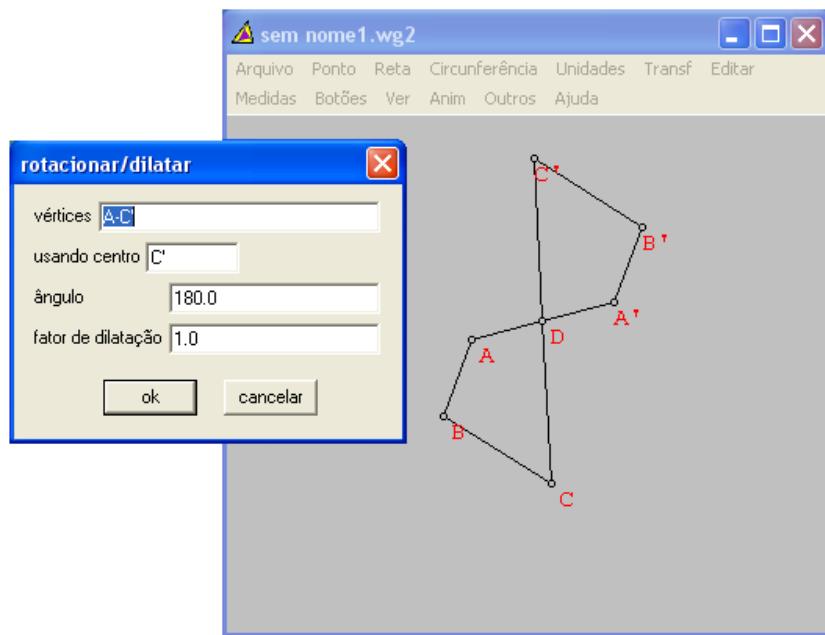
#### 2.1.1 Transladar

Neste item escolhemos os vértices, por qual múltiplo e em direção de qual vetor, desejamos realizar uma transladação.



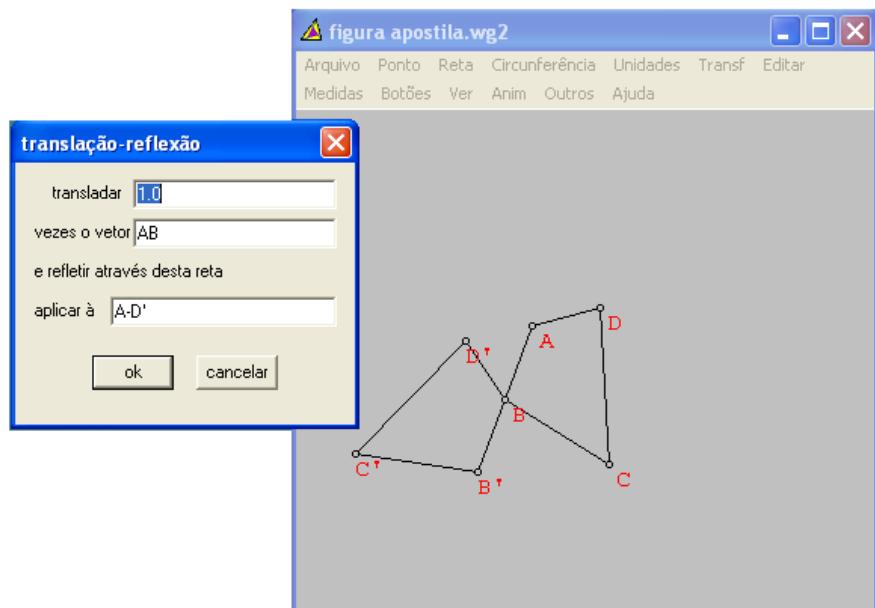
#### 2.1.2 Rotacionar

Neste recurso, podemos rotacionar as figuras, basta escolhermos os vértices que serão rotacionados, o centro de rotação, o ângulo e o fator de dilatação.



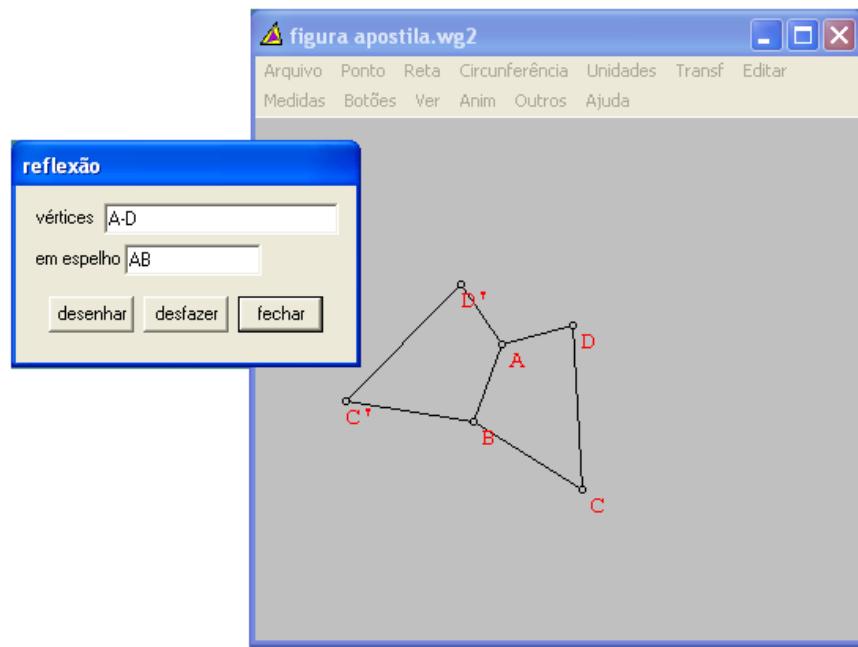
### 2.1.3 Translação-reflexão

Neste item podemos fazer translações e reflexões ao mesmo tempo, precisamos escolher o vetor que vamos transladar e a medida de translação sobre o vetor escolhido, e quais vértices refletiremos através deste segmento.



### 2.1.4 Espelho

Neste item podemos dar à figura desejada o chamado efeito espelho ou reflexão, temos apenas que escolher os vértices e o segmento ao qual faremos a reflexão.



### 2.2 Medidas

Calcula a medida de segmentos, ângulos e áreas entre outros, que estão na janela gráfica. Abaixo, a tabela com as convenções a serem utilizadas para a obtenção de algumas medidas.

Convenção	Significado
A	Coordenadas do ponto A
AB	Comprimento do segmento AB
ABC	Área do triângulo ABC
ABCD	Área do quadrilátero ABCD
$\angle ABC$	Medida (em graus) do ângulo ABC
$AB+BC+CA$	Perímetro do triângulo ABC

[per](ABCD)	Perímetro do quadrilátero ABCD
AB/AC	Razão entre os comprimentos de AB e AC
(AB^2+BC^2)^0.5	Comprimento da hipotenusa AC no triângulo retângulo ABC
[x](A)	Coordenada-x do ponto A
[sin](<ABC)	Seno do ângulo ABC
[arc](ABC)	Comprimento do arco de circunferência de raio BA e ângulo central ABC
[cir](AB)	Comprimento da circunferência de raio AB
[pie](AB)	Área do círculo de raio AB
[slope](A,B)	Coeficiente angular do segmento AB
[eqn](A,B)	Equação inclinação-intercepto
[pi]	$\pi$
[phi]	1,61803 = razão áurea

*Exercício:*

Construir um triângulo e determinar suas medidas (lados, perímetro, ângulos e área);

## 2.3 Editar

### 2.3.1 Legendas

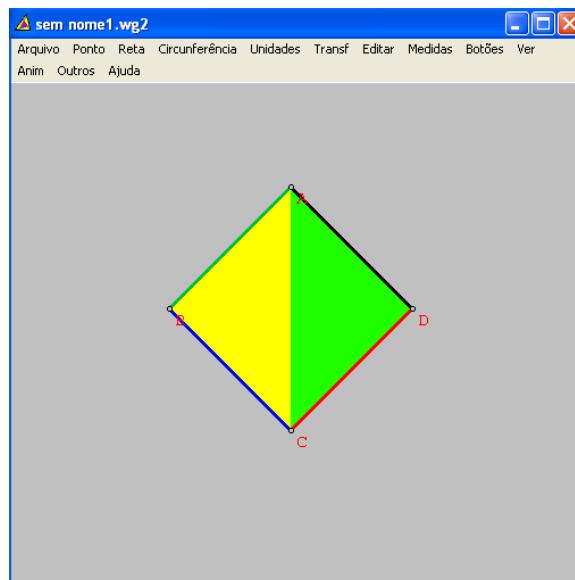
Sub menu	Função / Opções
Fonte	Alterar fonte, estilo e tamanho do ponto
Opaco	Tornar o fundo da legenda opaco ou não opaco
Cor	Alterar a cor de todas as letras
Cor de movimento	Alterar a cor de todas as letras quando em movimento
Trocar	Trocar legendas de dois pontos
Tipo de ponto	Mudar o estilo dos pontos (•, °, ×, +, , •) = ctrl D
Tamanho do ponto	Alterar o tamanho dos pontos (1 a 99)
Individual	Alterar o estilo e legenda de uma lista de pontos (bola fechada, bola aberta, não marque, em +, em ×, mostrar / não mostrar)

### 2.3.2 Realce

Sub menu	Função / Opções
Atributos da reta	Espessura (1 a 100), cor, estilo (sólido, tracejado, riscado, risco-tracejado, traço-risco-traço, invisível)
Atributos do círculo	Espessura, cor e estilo
Preencher regiões	Cor e estilo (sólido, diagonal direito, quadriculado reto, quadriculado obliqua, diagonal esquerda, horizontais, verticais) de polígonos ou círculos
Marcas	Onde, tipo (sinal, seta, arco do ângulo, sinal da perpendicular, raio/vetor, ângulo direcionado), número (1 a 6) e tamanho real (1,0 a 3,0)
Comprimento do sinal	Tamanho da porcentagem da largura do eixo
Comprimento da seta	Tamanho da porcentagem da largura do eixo
Raio do arco	Tamanho da porcentagem da largura do eixo
Comprimento do sinal de perpendicular	Tamanho da porcentagem da largura do eixo

#### Atividade:

Faça um retângulo como da figura abaixo.



### 2.3.3 Apagar

Apaga um ponto, uma reta ou uma circunferência conforme escolha.

### 2.3.4 Coordenadas

Define um sistema de coordenadas cartesianas com origem em um ponto a se definir.

### 2.3.5 Cabeçalho

Dá nome ao documento com o qual estamos trabalhando.

## 2.4 Botões

### 2.4.1 Segmentos, semi-retas, retas e circunferências

Estas funções permitem a construção desses elementos de uma forma mais prática do que as anteriormente apresentadas. Uma vez selecionadas, para construir seus respectivos elementos deve-se:

#### *SEGMENTOS*

Na janela das construções, selecionar com o botão esquerdo do mouse um ponto, sem soltar arraste a seta até o outro ponto que será a outra extremidade do segmento pretendido. Para construirmos **SEMI-RETAS** e **RETAS**, deve-se prosseguir de forma análoga à construção de um segmento.

#### *CIRCUNFERÊNCIAS*

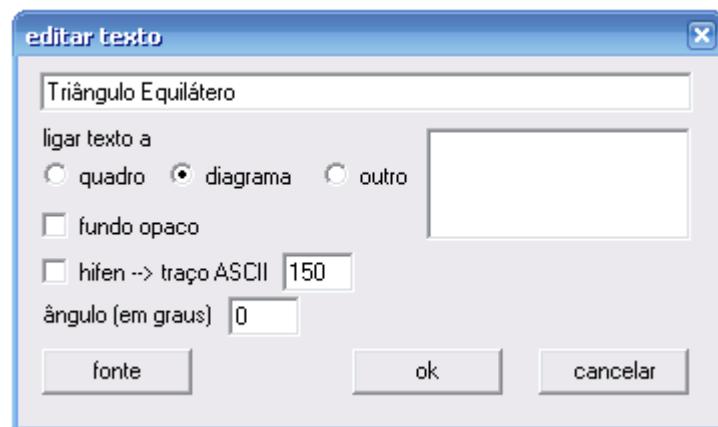
É necessário selecionar o ponto que será o centro da circunferência, clicar nele e arrastar a seta até onde será a circunferência.

### 2.4.2 Arrastar vértices

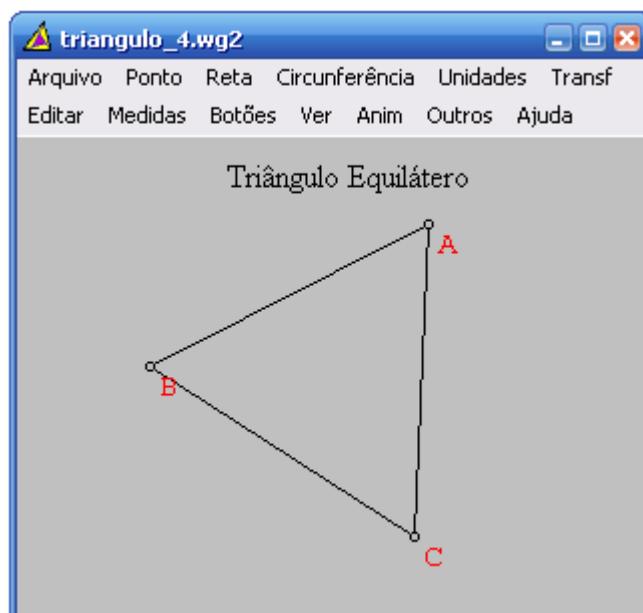
Permite arrastar vértices independentemente, ou seja, podem estar isolados ou pertencerem a uma construção qualquer.

### 2.4.3 Texto

Possibilita a inserção de textos na janela das construções. Para isso, selecione essa opção, e em seguida clique com o botão direito do mouse na janela onde deverá ser inserido o texto.



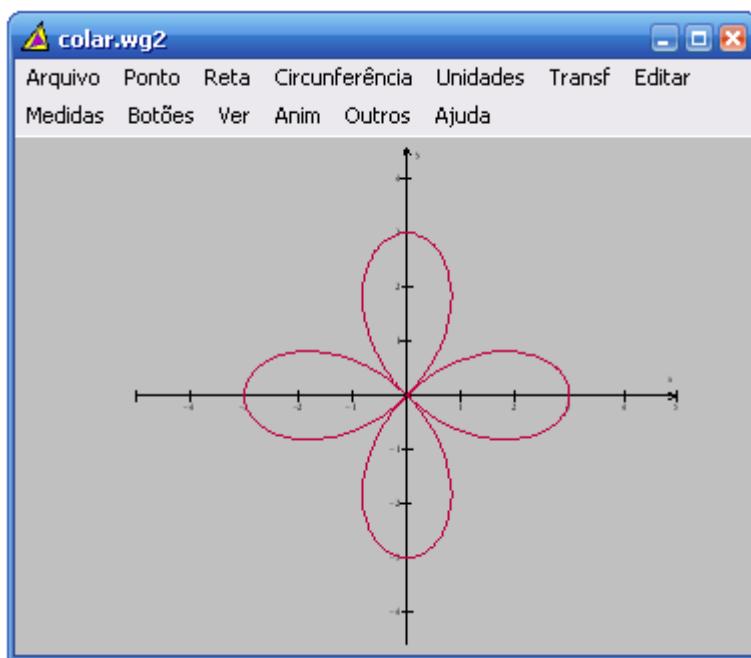
Clique em ok e seu texto aparecerá na janela, como mostra a figura abaixo:



*OBS.:* Se o seu texto não estiver exatamente no local pretendido, clique com o botão esquerdo do mouse no texto e sem soltá-lo movimente-o até o local desejado.

#### 2.4.4 Colar

Este item permite colar (inserir) imagens de outros programas. Basta selecionar esta opção e clicar com o botão direito no local onde se quer colocar a figura. Para movimentá-la, clique sobre ela com o botão esquerdo do mouse e arraste-a. Na janela abaixo foi colado um gráfico importado do freeware Winplot.



#### 2.4.5 XY .....recentralizar

Ao acionar este comando, você poderá centralizar a imagem construída sem alterar o seu formato conforme um ponto, ou seja, basta clicar com o botão direito sobre o ponto que deverá ser o centro da janela.

#### 2.4.6 Rotação

De forma análoga ao item RECENTRALIZAR permite rotacionar uma figura de acordo com um ponto.

### 2.5 Ver

Dentre as funções apresentadas no item **VER** estudaremos sobre as mais comumente utilizadas. São elas:

### 2.5.1 Zoom

Para possibilitar uma melhor visualização da construção realizada podemos aproximar (**MAIS..PageUp**) ou afastar (**MENOS..PageUp**) a imagem. Ou também, de forma mais prática através dos comandos do teclado **PAGE UP** e **PAGE DOWN** respectivamente.

### 2.5.2 Eixos

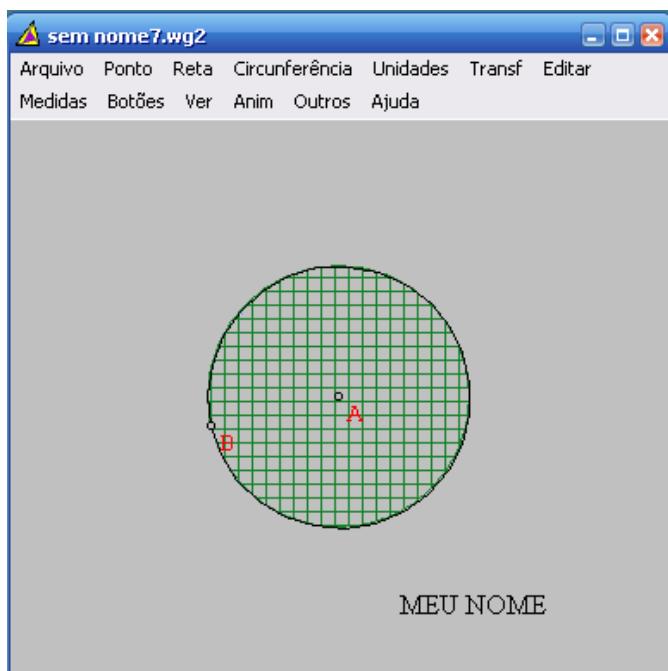
Esta função possibilita editar a visualização dos eixos cartesianos. Para visualizar ou ocultar os eixos é também suficiente o comando **Ctrl A**. As demais funções desse item permitem modificar a espessura, a cor e a fonte da legenda.

### 2.5.3 Grade e linhas da grade

A função **GRADE** permite o usuário editar as diferentes formas que os eixos cartesianos poderão assumir. A função **LINHAS DA GRADE** tem por finalidade possibilitar a edição dos tamanhos referentes à grade de eixos.

*Exercício:*

Faça a construção abaixo onde o ponto A tem coordenadas (0,0) e o raio AB mede 2 cm.



### 3. PROBLEMAS 2 – dim

#### 3.1 Problema:

*Traçar duas semi-retas que dividam um ângulo reto em três ângulos congruentes.*

#### Construção:

Seja  $\hat{O}$  o ângulo dado.

- Centro em O e raio qualquer, tracemos um arco, que corta os lados do ângulo em dois pontos, os quais chamaremos de A, B.
- Com o mesmo raio e centro em A e B, contruamos duas circunferências, que cortam o arco construído no item 1, nos pontos C, D.
- As semi-retas  $S_{(OC)}$  e  $S_{(OD)}$  constituem a solução do problema.

#### 3.2 Problema:

*Dado um segmento AB, obter sua seção áurea.*

#### Construção:

- Passamos por B uma perpendicular a AB.
- Sobre esta perpendicular, marquemos um ponto D tal que  $\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ .
- Unamos os pontos A, D.
- Tracemos um arco de centro D e raio  $\overline{BD}$ , que corta AD em um ponto E.
- Tracemos um arco de centro A e raio  $\overline{AE}$ , que corta AB em um ponto C.
- O ponto C é a seção áurea de AB.

#### 3.3 Problema:

*Traçar uma tangente a uma circunferência dada, que seja paralela a uma reta também dada.*

#### Construção:

- Sejam  $C(0,r)$  e  $s$  a circunferência e a reta dadas, respectivamente.
- Passemos por O, uma perpendicular a  $s$ , que corta a circunferência  $C(0,r)$  em dois pontos, A, B.
- Passemos por A (ou por B), uma paralela a  $s$ .

### 3.4 Problema:

*Vamos mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.*

#### Construção:

- Construa um triângulo ABC;
- Através do ponto A trace uma reta paralela a reta BC, onde você obterá um ponto D;
- Sobre a reta AD marque um ponto E;
- Usando o comando medidas vamos calcular as medidas do ângulos  $\angle EAB$ ,  $\angle ABC$  e observamos que os mesmos são congruentes, o mesmo fizemos para os ângulos  $\angle DAC$ ,  $\angle ACB$  concluindo que os mesmos são congruentes e para finalizar calculamos a medida do ângulo  $\angle BAC$ ;
- Note que os ângulos  $\angle EAB$ ,  $\angle DAC$  e  $\angle BAC$  somados formam um ângulo raso de medida 180º;
- Na janela **medidas** obtenha a soma dos ângulos  $\angle EAB$ ,  $\angle DAC$  e  $\angle BAC$ , digitando:  $\angle EAB + \angle DAC + \angle BAC$ , logo após clique enter;
- Sendo os ângulos  $\angle EAB$  e  $\angle ACB$  congruentes e os ângulos  $\angle DAC$  e  $\angle ACB$  também, congruentes.
- Fazemos as devidas substituições, concluímos que:  $\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = 180^\circ$ ;
- Para finalizar movimente com os vértices do triângulo, modificando-o, e verifique que a soma dos ângulos internos permanece a mesma (180º) independente do tipo do triângulo.

### 3.5 Problema:

*Dado um segmento AB, obter seu ponto médio e sua mediatrix.*

#### Construção:

- Com centro em A e raio AB, traçamos a circunferência C1.
- Com centro em B e raio AB, traçamos a circunferência C2.
- Obtemos os pontos E e F na intersecção de C1 e C2.
- Traçamos o segmento EF obtendo o ponto G na intersecção.
- G é o ponto procurado e reta EF é a mediatrix procurada.

### 3.6 Problema:

*Vamos construir um paralelogramo e verificarmos que as diagonais, do mesmo, se interceptam num único ponto.*

#### Construção:

- Construa um paralelogramo;
- Verifique que os lados opostos do paralelogramo são congruentes;
- Construa as suas diagonais;
- Observe que os segmentos dos lados opostos do paralelogramo têm a mesma medida;
- Construa circunferências para concluir que as diagonais deste paralelogramo se interceptam num único ponto.

### 3.7 Problema:

*Vamos mostrar que todo circunferência circunscreve um triângulo qualquer.*

#### Construção:

- Construa um triângulo qualquer.
- Construa o ponto média de cada lado, chame-os de D, F e H.
- Trace uma reta perpendicular a cada lado do triângulo passando por seus respectivos pontos médios. (Note que as retas se interceptam num único ponto, chame- o de J)
- Construa uma circunferência com centro em J passando por A. O que acontece com B e C?
- O que você pode concluir sobre o ponto J?

### 3.8 Problema:

*Construir um segmento que passa por um ponto dado e é paralelo a um dado segmento de reta que não contém esse ponto.*

#### Construção:

- Sejam A o ponto e BC o segmento dado.
- Centro em C e raio AB traçamos uma circunferência D.
- Com centro em A e raio BC traçamos uma segunda circunferência E.
- Seja F o ponto de interseção das circunferências D e E. Onde F e B estão em lados opostos relativamente a AC. Assim, AF é a paralela desejada.

### 3.9 Problema :

*Construir um segmento que passa por um ponto dado, e é perpendicular a uma reta, também dada.*

#### Construção:

- Sejam A e a reta que passa pelos pontos B e C dados, respectivamente.
- Marquemos um ponto D sobre esta reta dada e traçamos uma circunferência de centro A e raio AD, cortando a reta em outro ponto F.
- Tracemos circunferências de raio DF com centros em D e F.
- Marquemos a intersecção destas circunferências. A reta AK é perpendicular a DF.

### 3.10 Problema :

*Construir uma semi-reta que divide um ângulo dado em dois outros ângulos congruentes (bissecção de um ângulo).*

#### Construção:

- Seja ABC um ângulo dado.
- Com centro em B e raio BA, tracemos uma circunferência que intercepta o outro lado do ângulo (BC) no ponto E. Pode ocorrer que a circunferência não intercepte BC, assim prolonguemos BC no sentido de B para C ate interceptar a circunferência num ponto.
- Com centro em A e raio AE e com centro em E raio AE, tracemos as respectivas circunferências.
- Essas duas circunferências interceptam em dois pontos. Seja J o ponto de intersecção que está no semi plano oposto aquele determinado por AE e que não contem B.

Observamos que AEJ é um triângulo equilátero.

Assim liguemos os pontos B e J para obter o segmento BJ que bissecta o ângulo ABC.

### 3.11 Problema:

*Demonstre que em 2 triângulos semelhantes*

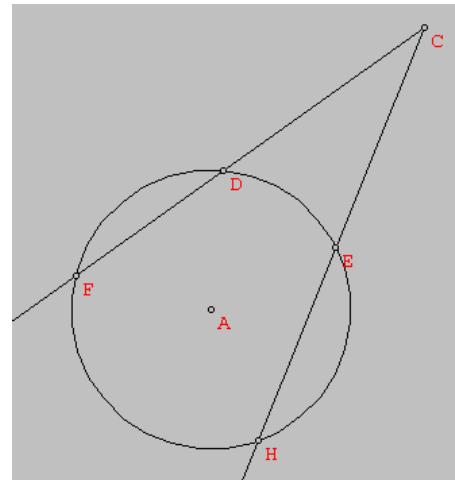
- a) A razão entre os comprimentos das bissetrizes de ângulos correspondentes é igual à razão de semelhança.*
- b) A razão entre os comprimentos das medidas relativas a lados homólogos é igual à razão de semelhança.*
- c) A razão entre os comprimentos das alturas relativas aos lados homólogos é igual a razão de semelhança.*

### 3.12 Problema:

*Se por um ponto C, externo a uma circunferência, passamos duas retas que interceptam a circunferência nos pontos D, F, E, H, respectivamente, então  $CD*CF = CE*CH$ .*

#### Construção:

- Inicialmente construímos uma circunferência qualquer, de centro em A.
- Marquemos um ponto C externo a esta circunferência.
- Tracemos duas retas que interceptam a circunferência, e marquemos estes pontos.
- Verifiquemos as medidas de  $CD*CF = CE*CH$ .
- Mova o ponto C.



### 3.13 Problema :

*As bissetrizes dos ângulos internos de um paralelogramo interceptam-se formando um retângulo.*

#### Construção:

- Construa um paralelogramo ADCB;
- Marque os ângulos  $\angle ADC$ ,  $\angle DCB$ ,  $\angle CBA$ ,  $\angle BAD$ ;
- Marque as bissetrizes nos ângulos construídos;
- Marque os pontos de intersecção das bissetrizes;
- Observe que as bissetrizes dos ângulos opostos são paralelas, assim podemos concluir que os pontos de intersecção das bissetrizes formam um paralelogramo;
- Em um dos triângulos obtidos pelas intersecções das bissetrizes, meça os novos ângulos obtidos que estavam marcados;
- Observe agora e conclua neste triângulo que o ângulo que não está marcado mede  $90^\circ$ ;
- Relembre do resultado que ângulos opostos são congruentes, e assim você terá um paralelogramo de com um ângulo reto;

- Relembre agora do resultado que garante que se tivermos um paralelogramo com um ângulo retos os demais também serão retos e assim teremos o retângulo procurado .

### 3.14 Problema :

*A partir de cada vértice de um quadrado ABCD, cujos lados são percorridos em um mesmo sentido, marcam-se pontos E, F, G e H tais que AE=BF=CG=DH. Mostre que o quadrilátero EFGH também é um quadrado*

#### Construção:

- Construa o quadrado ABCD;
- Marque os pontos E, F, G e H tais que AE=BF=CG=DH;
- Ligue os segmentos obtidos pelos pontos médios;
- Calcule as medidas de cada segmento que é obtida pela união dos pontos médios;
- Marque os ângulos  $\angle EHG$ ,  $\angle HGF$ ,  $\angle GFE$ ,  $\angle FEH$ ;
- Meça os ângulos marcados;
- Através das medidas dos pontos médios e dos ângulos marcados conclua que EFGH também é um quadrado

### 3.15 Problema:

*Qual a figura obtida quando ligamos os pontos médios dos lados de um retângulo?*

### 3.16 Problema:

*Pelo ponto de encontro das diagonais de um quadrado, traçam-se dois segmentos perpendiculares entre si e limitados pelos lados do quadrado. Mostre que esses segmentos são congruentes.*

### 3.17 Problema:

*Se AB e CD são cordas distintas de uma mesma circunferência que se interceptam num ponto P, então  $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$ .*

Construção: Os triângulos  $APD$  e  $CPB$  são semelhantes, pois  $D\hat{A}P = B\hat{C}P$ ,  $P\hat{D}A = C\hat{B}P$  e  $A\hat{P}D = C\hat{P}B$ . Logo  $\frac{\overline{CP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}$  e, daí,  $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$ .

### 3.18 Problema:

*Duas circunferências de centro A e B, de mesmo raio se interceptam em dois pontos F e E. Se G é o ponto de intercessão de AB e FE, verifique que AG é congruente a GB.*

#### Construção:

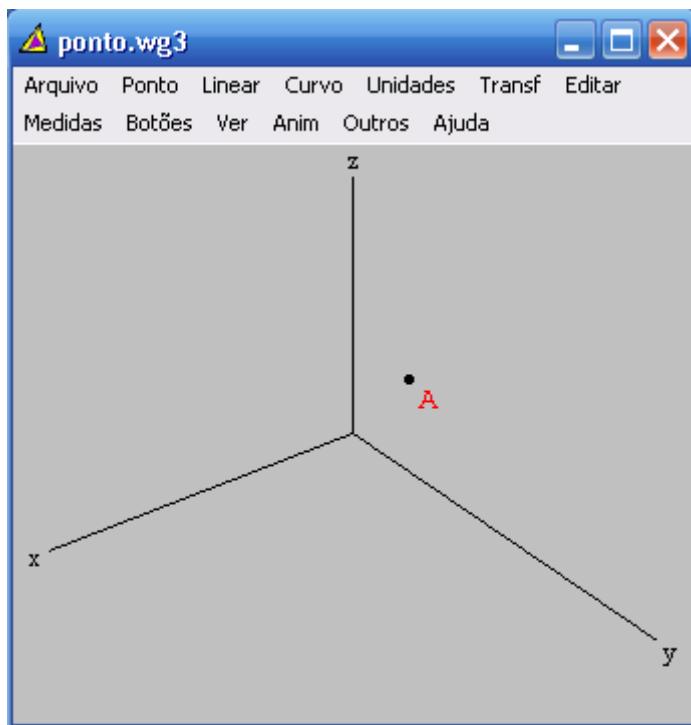
- Construir as circunferências de centro em A e outra de centro em B, de mesmo raio de modo a interceptarem em dois pontos F e E.
- Traçar os segmentos AB e FE, marcar o ponto G na intercessão desses segmentos.
- Analisar os triângulos FBG e FAG.
- Mover os pontos A e B.

## 4. JANELA 3 – dim

### 4.1 Pontos

#### 4.1.1 Coordenadas Absolutas

Para definir um ponto, depois de inserir as coordenadas desejadas para x, y e z nas respectivas caixas de edição, basta clicar em marcar.



#### 4.1.2 Coordenadas relativas

Pontos em um segmento AB são descritos linearmente por uma coordenada  $t$ , onde  $t=0$  significa A,  $t=1$  significa B,  $t=0.5$  significa o ponto médio de AB.

#### 4.1.3 Coordenadas relativas

Como acima, exceto que pontos em um triângulo ABC são descritos usando-se duas coordenadas, aplicadas como coeficientes aos vetores AB e AC.

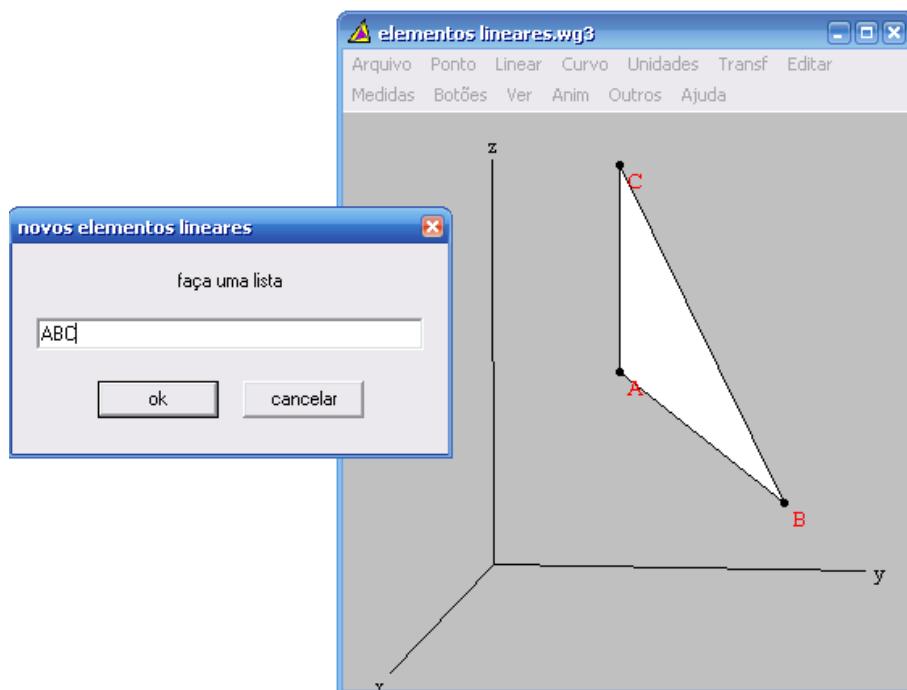
#### 4.1.4 Coordenadas relativas

Da mesma forma, exceto que pontos em um tetraedro ABCD são descritos usando-se três coordenadas, usadas como coeficientes de AB, AC, e AD.

### 4.2 Linear

Neste item encontramos opções nas quais podemos construir planos e marcar alturas relativas a retas, planos, reta à reta e normais ao plano. Outras opções são construções de paralelepípedos, a ferramenta “cortar planos”, e também construir um ângulo diedral.

Para construirmos um plano precisa-se primeiramente marcar três pontos. Após este passo, clique em **Linear→Segmentos ou faces** para construir segmentos ou planos. Se os pontos forem colineares o software irá entender que o comando é traçar um segmento, se forem não colineares, construirá um plano.



Com o plano construído podemos traçar altitudes relativas ao plano:

*Altitude relativa à reta.*

No plano ABC traçar a altura relativa à reta AB pelo ponto C.

*Altitude relativa ao plano.*

No plano ABC traçar a altura relativa ao plano por algum ponto do plano.

*Altitude relativa entre retas*

Escolha duas retas no plano que tenham perpendiculares em comum.

*Normal ao plano*

No plano ABC escolha um ponto no qual será traçado uma altura perpendicular ao plano.

Para construir paralelepípedos temos que marcar quatro pontos na janela gráfica. Após clique em **Linear→Paralelepípedo** defina a esquina, ou seja, o ponto que será um dos vértices do paralelepípedo.

Para construir um ângulo diedral clique em **Linear→Ângulo Diedral** e defina o numero de lados, o plano concorrente que irá formar um diedro e o ângulo formado pelos planos.

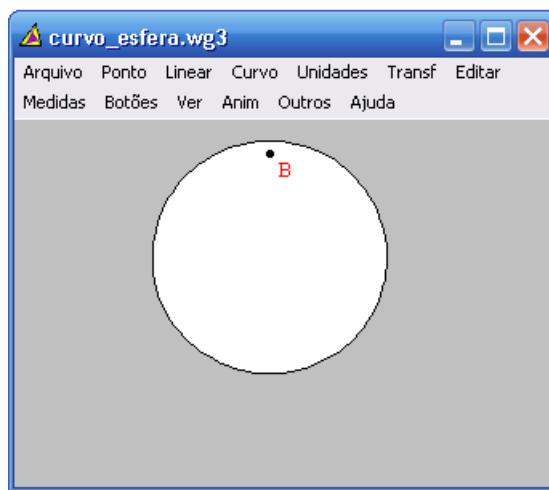
## 4.3 Curvo

Nesta opção podemos construir: Esferas, Cones, Troncos, Cilindros, Discos. Como no item anterior, para termos acesso a esses recursos, precisamos inicialmente marcar no mínimo três pontos não colineares na janela gráfica.

### 4.3.1 Esferas

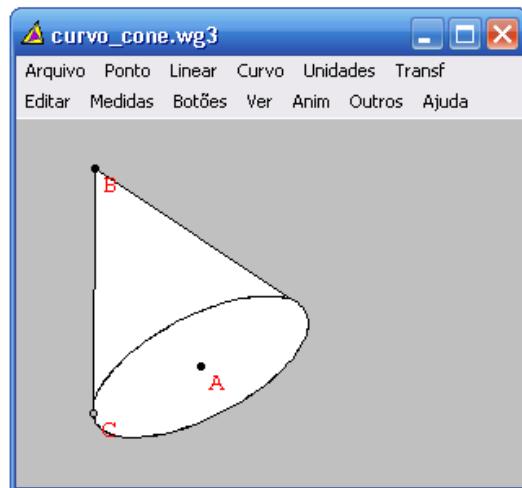
Para desenhar uma esfera clique em **Curvo→Esfera→Raio-centro** e defina o centro e a medida do raio.

Neste mesmo item podemos ainda fazer a construção de: Esferas inscritas e circunscritas no tetraedro, inscritas no cone e segmentos de esferas. Lembrando que para usufruir destes recursos precisamos construir esses poliedros anteriormente citados.



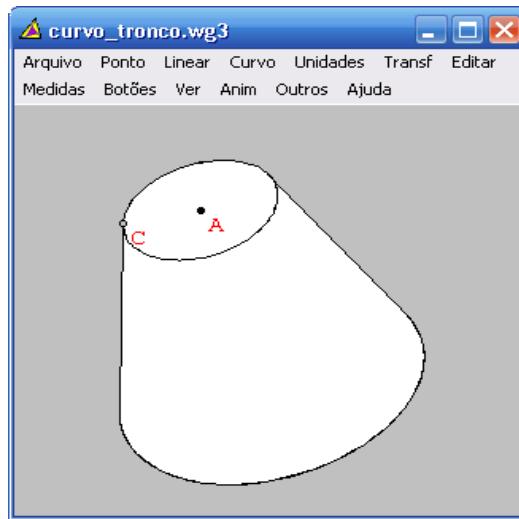
### 4.3.2 Cones

Para desenhar um cone, clique em **Curvo→Cone** e defina o centro da base, a medida do raio e o ponto que será o vértice do cone.



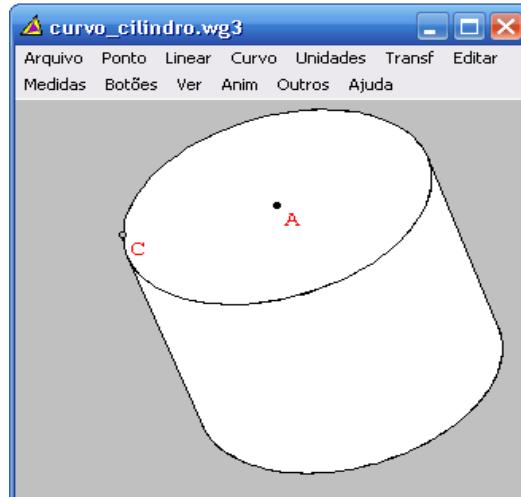
#### 4.3.3 Troncos

Para desenhar um tronco, clique em **Curvo→Troncos** e defina o centro das bases e a medida dos seus respectivos raios.



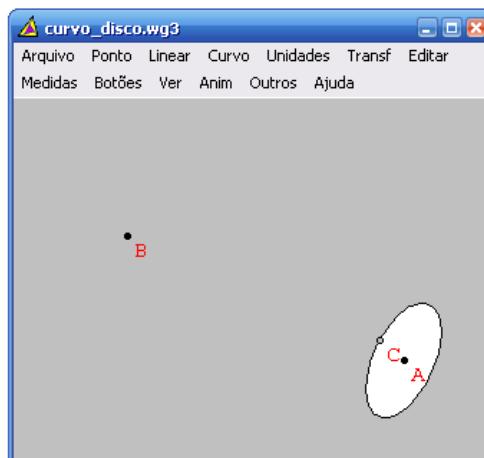
#### 4.3.4 Cilindros

Para construir um cilindro, clique em **Curvo→Cilindro** e defina os centros de suas bases e a medida do raio do cilindro.



### 4.3.5 Discos

Para construir um disco clique em **Curvo→Disco** e defina o centro e a medida do raio do disco, e o pólo (ponto no qual junto com o centro do disco forma o vetor normal do mesmo).



*Exercício:*

Construa uma calota esférica de centro em  $C=(0,0,1)$ , pólo  $D=(0,0,0)$  e com raio 0,5 e um cilindro de base com centros em  $D$  e  $C$  e raio 0,5.

### 4.4 Unidades

#### 4.4.1 Poliedro

Permite a construção de alguns sólidos geométricos importantes. São eles:

#### CLÁSSICOS

Disponibiliza a construção de polígonos freqüentemente estudados como tetraedros, cubos, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

**PRISMAS, PIRÂMIDES, ANTIPIRISMAS, PARALELEPÍPEDO, TETRAEDRO**

Para construirmos esses poliedros siga os seguintes comandos: **poliedro→clássicos→poliedro desejado**, e escolha o número de faces laterais. Este item permite construirmos figuras com até 25 faces laterais.

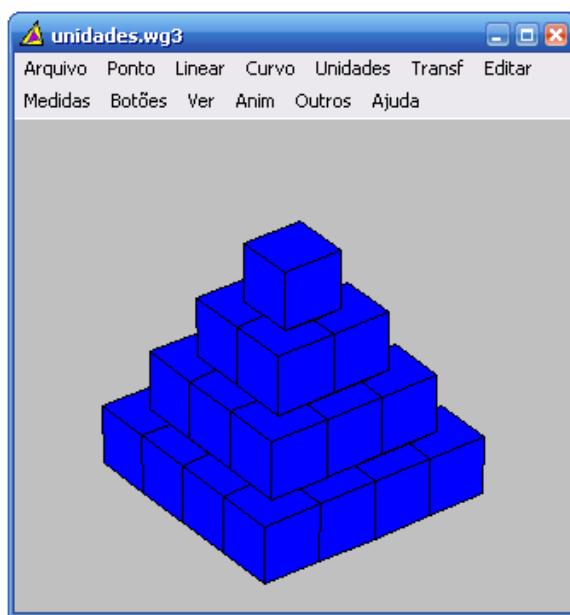
OBS.: O Wingeom está programado para inserir poliedros de faces brancas. Caso queira, você poderá mudá-las de cor, para isso deverá antes de construir os poliedros acionar os seguintes comandos: **outros→cores→face próxima**.

*Exercício:*

Construa numa mesma janela, um prisma com 4 faces laterais de cor azul e uma pirâmide com 5 faces laterais de cor vermelha.

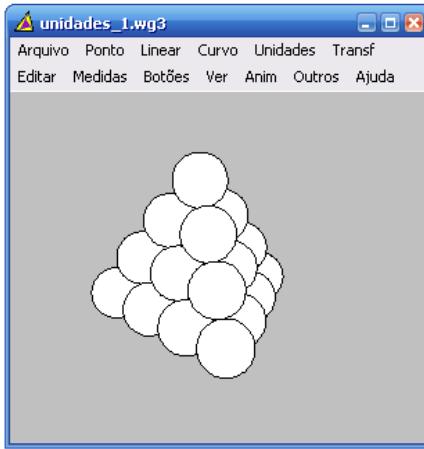
### **PIRÂMIDES DE CUBOS**

Esta função permite construir pirâmides sobrepondo-se cubos. Este artifício poderá ser amplamente utilizado para problemas de áreas de figuras com estas características. A figura abaixo mostra um exemplo deste tipo de construção, onde foram inseridas 4 camadas.



#### **4.4.2 Superfícies**

Permite a construção das seguintes superfícies geométricas: cilindro, cone, tronco e esfera (ou apenas um de seus hemisférios). Outra importante função que apresenta, é a construção através de **arranjo de esferas**, a qual permite a construção de pirâmides quadradas, triangulares e cúbicas através da aglomeração de esferas. A janela abaixo mostra um exemplo de pirâmide triangular por arranjo de esferas:



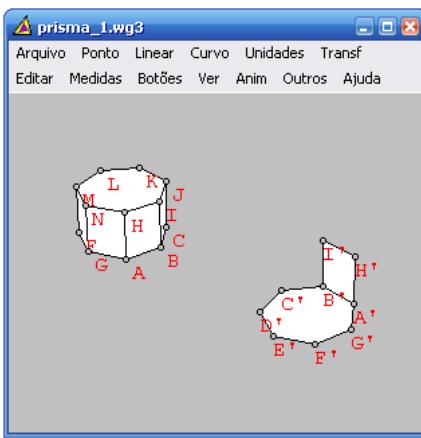
**Obs.:** Caso se queira atribuir cores diferentes, remover, preencher ou pontilhar uma esfera basta usar o comando **Editar- Elementos curvos**.

#### 4.4.3 Polígono regular

Possibilita a construção de polígonos regulares com o número de lados desejado.

#### 4.4.4 Duplicar

Esta função viabiliza a construção automática de uma figura congruente com uma figura anteriormente construída, ou então construir parte dela indicando os vértices das faces que deverão ser duplicados, conforme a imagem abaixo:



*Exercício:*

Construir um cubo de esferas de 3 camadas, com raio 1,5, tal que a 1<sup>a</sup> camada seja pintada de azul, a 2<sup>a</sup> de vermelha e a 3<sup>a</sup> de verde.

## 5. Menus Auxiliares 3-dim

### 5.1 Editar

#### 5.1.1 Desfazer e Refazer

De forma análoga as construções em 2-D, esta função viabiliza o usuário desfazer (**Ctrl+Z**) ou refazer (**Ctrl+Y**) uma operação anteriormente realizada.

#### 5.1.2 Coordenadas

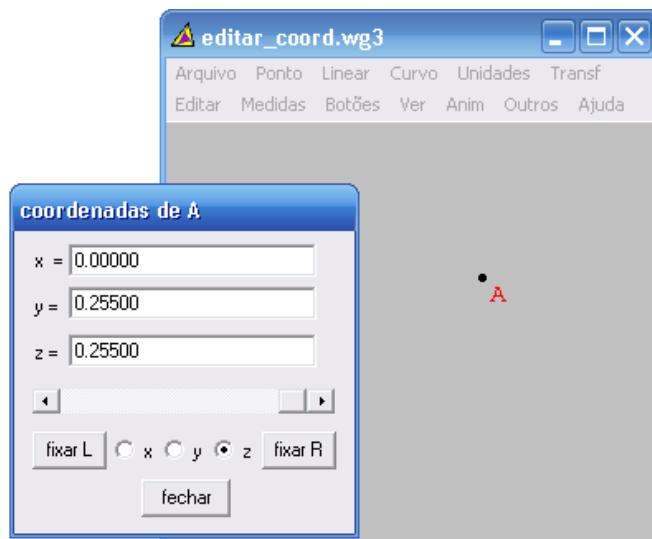
Este item permite visualizar as coordenadas de um ponto anteriormente construído, independentemente se esses valores foram inseridos pelo usuário ou se fazem parte de alguma figura construída de forma direta pelo software.

### 5.2 Botões

As funções dos botões direito e esquerdo do mouse são indicados pelos itens selecionados:

#### 5.2.1 Editar coordenadas

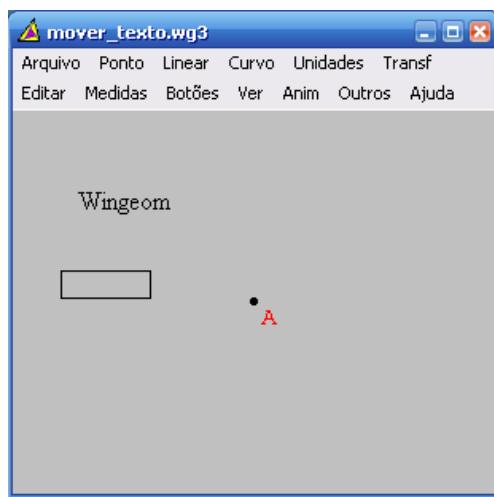
Pontos cujas coordenadas estão “definidas” são editadas usando-se o botão direito.



#### 5.2.2 Texto

Para arrastar um texto existente, segure o botão esquerdo do mouse sobre o texto, arraste o ponteiro para o local desejado. Para inserir um novo texto, clique com o botão direito do mouse no local onde deseja colocá-lo. Uma caixa de diálogo abre, com uma caixa de edição para o texto, com opções de fonte e cor. Você pode vincular

o texto à figura, ao sistema de coordenadas, ou a um vértice. Nas duas últimas opções, o texto pode deixar um campo de visão. Um novo texto aparece com seu canto superior esquerdo no ponteiro. Para editar um texto existente é necessário dar um clique com o botão direito sobre esse texto . Em particular, é assim que se pode mudar a legenda de um vértice.



### 5.2.3 Coordenada

Todas as construções são executadas analiticamente, usando um sistema de coordenadas. Com o mouse neste modo, clique com o botão esquerdo em qualquer vértice a segure o botão para ver suas coordenadas (x,y,z). O botão direito ajusta um vértice selecionado para o centro da tela.



### 5.2.4 Colar

Use o botão direito para colar da área de transferência para a figura (equações, vetores e gráficos somente) e o botão esquerdo para arrastar tais imagens. Clique com o botão direito no gráfico para também removê-lo ou para mudar sua aparência de fundo transparente para opaco.

### 5.3 Ver

#### 5.3.1 Aparência

Permite adequar a visualização da construção realizada conforme a necessidade do usuário. Por exemplo, abaixo a figura 1 mostra uma pirâmide construída sem nenhum efeito, já a figura 2 mostra a mesma construção, porém com o subitem **pontilar retas escondidas** presente no item **aparência**, o que proporciona uma melhor visualização da figura.

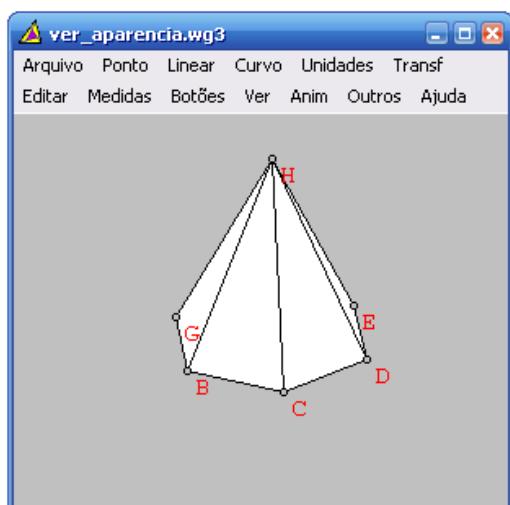


Figura 1

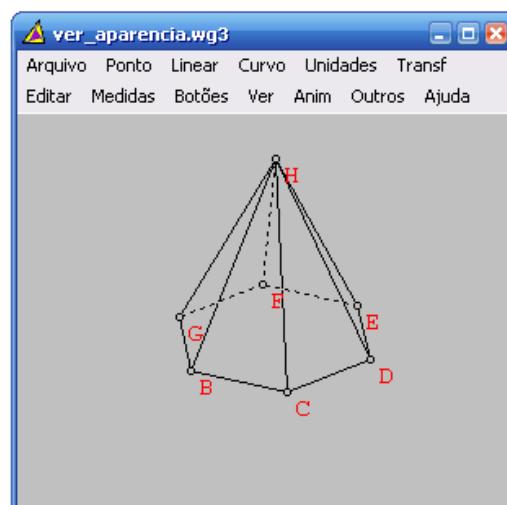


Figura 2

#### 5.3.2 Zoom

De forma análoga ao 2-D, podemos aproximar (**MAIS..PgUp**) ou afastar(**MENOS..PgUp**) a imagem. Ou também, de forma mais prática através dos comandos do teclado **PAGE UP** e **PAGE DOWN**, respectivamente.

### 5.3.3 Rotacionar

Esta é talvez a uma das mais importantes funções auxiliares em 3 –D, pois é fundamental para uma melhor visualização de determinadas características das figuras geométricas. Para isso, utilize as setas para cima, para baixo, para a esquerda e para a direita do teclado para rotacionar a figura nos respectivos sentidos das setas.

*Exercício:*

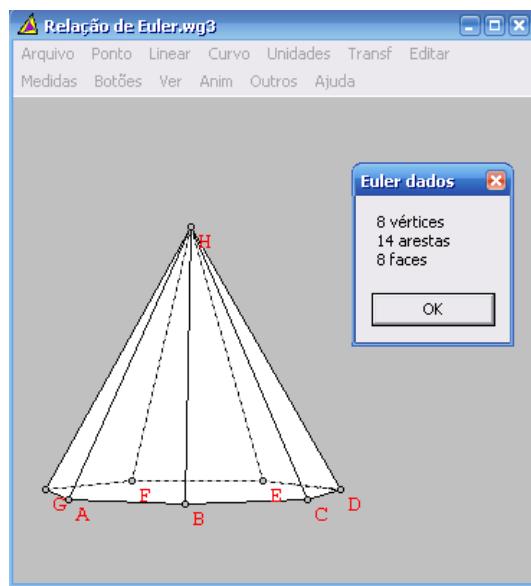
- 1) Mostre via construção geométrica no software wingeom, utilizando o recurso aparência, as seguintes afirmações:
  - a) As diagonais de um paralelepípedo se interceptam num único ponto.
  - b) Os três segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas de um tetraedro qualquer encontram-se em um mesmo ponto.
- 2) Nos exercícios acima, rotacione as construções realizadas para melhor visualizar os seus elementos.

### 5.3.4 Legendas, eixos e atributos do segmento

Estas funções permitem formatar esses itens de modo a modificar a cor, a espessura, o tamanho, entre outros detalhes.

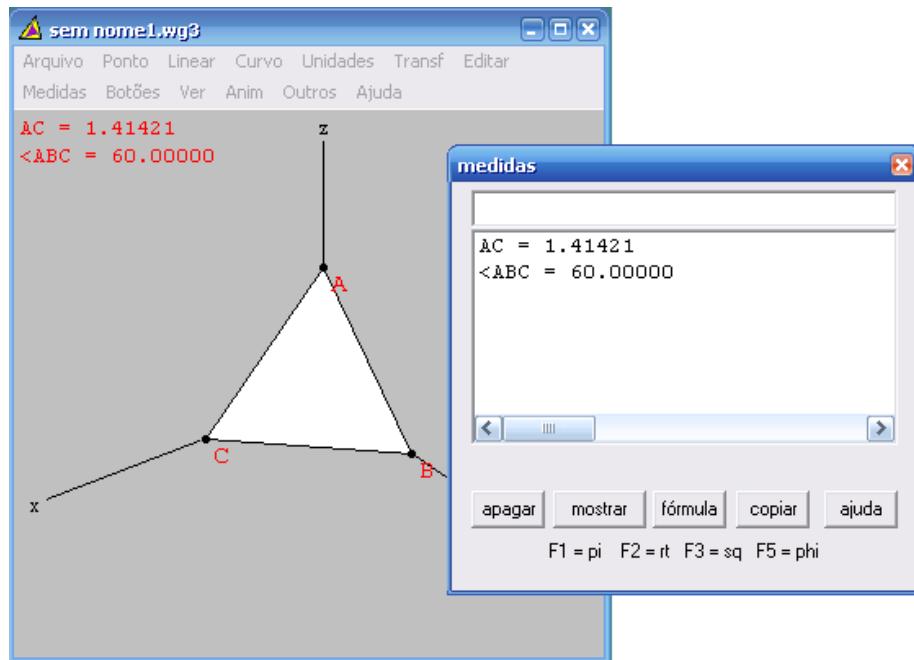
## 5.4 Outros

<b>Lista</b>	Aplicativo que gera uma lista com os pontos, superfícies ou faces construídas na janela de trabalho.
<b>Fonte</b>	Configura o estilo e a cor da fonte do texto que é escrito na janela gráfica, como por exemplo, a dos pontos e eixos.
<b>Cores</b>	Escolhe a cor do plano de fundo da área de trabalho ou do próximo plano que pretende-se construir.
<b>Relação de Euler</b>	Calcula o número de vértices, faces e arestas de um poliedro já construído na área de trabalho.

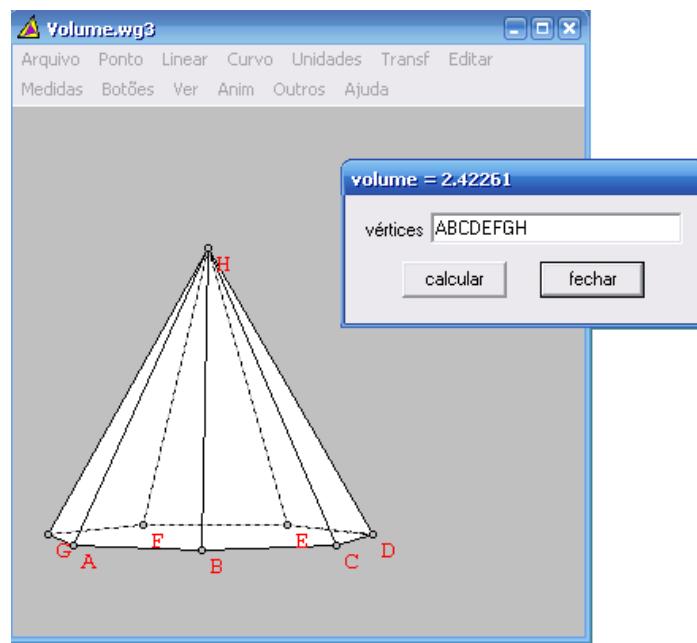


## 5.5 Medidas

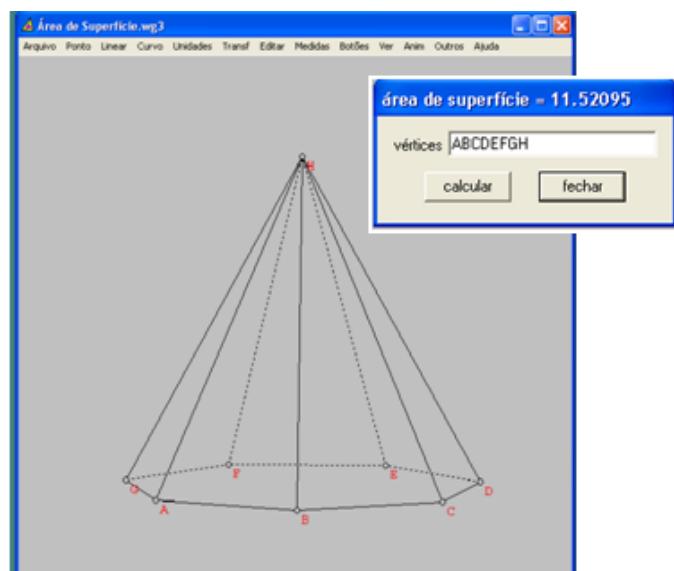
Calcula a medida de segmentos e ângulos que estão na área de trabalho. Para calcular a medida de um segmento, basta digitar o representante dele e apertar a tecla ENTER, já para obter a medida um ângulo, basta digitar < mais o representante do ângulo



**Volume:** Calcula o volume de um poliedro já construído na área de trabalho.



**Área se superfície:** Calcula a área de um poliedro já construído na área de trabalho.



## 6. PROBLEMAS 3 – dim

### 6.1 Problema

Dados quatro pontos quaisquer A, B, C e D do espaço (não necessariamente coplanares) e sejam E, D, F e G os pontos médios dos segmentos AB, BC, CD e DA respectivamente. Podemos então verificar que EDFG é um paralelogramo.

#### Construção:

- Marque os pontos A, B,C, e D;
- Construa o plano formado pelos A, B,C, e D;
- Marque os pontos médios dos segmentos AB, BC, CD e DA;
- Construa o plano formado pelos pontos médios

*Obs: o plano formando pelos pontos médios é o paralelogramo procurado e a prova disso segue dos resultados obtidos na geometria plana.*

### 6.2 Problema

Vamos construir um cone circular reto e uma esfera inscrita nele e explorar as propriedades e relações que se estabelecem entre ambos quando variamos a abertura do cone (raio da base do cone).

#### Construção:

- Insira um cone de raio da base medindo # (o símbolo sustenido é a notação usada pelo Wingeom para representar elementos variáveis de uma dada figura representada, como raio, altura,aresta, por exemplo) e altura medindo 3.
- Construa uma esfera inscrita no cone de raio #, com centro da base em A, vértice em B e raio #.
- Meça o raio da base do cone e o raio da esfera, indicando os segmentos AC e CF.
- Faça variar o parâmetro # (Menu *Animação/Variação de #*). No menu *Animação/Variação de #*, digite 0 na janela que se abre e clique em fixar E, em seguida digite 2 e clique em fixar D (os valores digitados e fixados determinam o intervalo de variação do raio da base do cone).

### 6.3 Problema

Todo tetraedro é inscritível a uma única esfera

#### Construção:

- Construir um tetraedro regular de aresta 1;
- Inserir nele uma esfera

### 6.4 Problema

Todo tetraedro é circunscrevível a uma única esfera

#### Construção:

- Construir um tetraedro regular de aresta 1;
- Circunscrever uma esfera nele.

## **Referências Bibliográficas**

LOCCI, V. **MINICURSO: Utilização do Software Wingeom no Ensino Fundamental, Médio e Superior.** Disponível em: <http://wwwp.fc.unesp.br/~valocci/UtilizdoWingeom.pdf>. Acessado em: 23/04/2009.

BIDEL, A. C. L., SANTOS, A. D., HALBERSTADT, F. F. CARVALHO, K. de S. LIMA, R. L. de **Tutorial: Wingeom.** Disponível em: [http://w3.ufsm.br/petmatematica/arquivos/apostila\\_wingeom.pdf](http://w3.ufsm.br/petmatematica/arquivos/apostila_wingeom.pdf). Acessado em: 15/04/2011.